

N° D'ENREGISTREMENT
AU C. N. R. S. :
A. O. 1593

THÈSES

PRÉSENTÉES

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

HAIM BREZIS

1^{re} THÈSE. — PROBLÈMES UNILATÉRAUX

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 12 février 1971 devant la Commission d'Examen

MM. J. LERAY	<i>Président</i>
G. CHOQUET	} <i>Examinateurs</i>
J.-L. LIONS	
M. BERGER	

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR

1972

N° D'ENREGISTREMENT
AU C. N. R. S. :
A. O. 1593

THÈSES

PRÉSENTÉES

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

HAÏM BREZIS

1^{re} THÈSE. — PROBLÈMES UNILATÉRAUX

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 12 février 1971 devant la Commission d'Examen

MM. J. LERAY	<i>Président</i>
G. CHOQUET	} <i>Examineurs</i>
J.-L. LIONS	
M. BERGER	

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR

1972



PROBLÈMES UNILATÉRAUX

PAR HAÏM BRÉZIS

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
INTRODUCTION.....	2
NOTATIONS.....	4

CHAPITRE I

Problèmes unilatéraux associés à des opérateurs elliptiques

I.1. <i>Inéquations variationnelles</i>	5
I.1.1. Formulation abstraite et notations.....	5
I.1.2. Régularité.....	7
I.1.3. Régularité et dualité.....	18
I.1.4. Principe du maximum et théorèmes de comparaison.....	21
I.2. <i>Problèmes linéaires avec contraintes unilatérales sur le bord</i>	32
I.2.1. Description du problème.....	32
I.2.2. Régularité.....	40
I.2.3. Principe du maximum et théorèmes de comparaison.....	57

CHAPITRE II

Problèmes unilatéraux associés à des opérateurs paraboliques

II.1. <i>Un résultat abstrait d'existence</i>	63
II.2. <i>Problème de Cauchy</i>	65
II.2.1. Existence, unicité et propriétés de la solution faible.....	65
II.2.2. Rappels et compléments sur les semi-groupes non linéaires.....	80
II.2.3. Régularité en t	86
II.2.4. Régularité en x ; exemples.....	98
II.2.5. Principe du maximum et théorèmes de comparaison.....	103
II.2.6. Autres problèmes unilatéraux d'évolution.....	111
II.3. <i>Problème périodique</i>	128

CHAPITRE III

Problèmes unilatéraux associés à des opérateurs hyperboliques

III.1. <i>Propriétés de la solution forte; régularité en t</i>	139
III.2. <i>Régularité en x; Exemples</i>	143
III.3. <i>Existence, unicité et propriétés de la solution faible</i>	149
APPENDICES.....	160
BIBLIOGRAPHIE.....	165

INTRODUCTION

On se propose d'étudier diverses propriétés des solutions d'inéquations variationnelles (au sens de Lions-Stampacchia [1]). Ces problèmes interviennent dans de nombreuses situations concrètes quand on a un système régi par des équations aux dérivées partielles et soumis à des « contraintes unilatérales »; par exemple, on impose à la solution u d'un problème d'évolution de ne pas dépasser une valeur critique Ψ et si u atteint Ψ , on modifie la loi régissant le système de manière à préserver la contrainte $u \leq \Psi$. On rencontre alors le phénomène suivant : même si les données sont très régulières, la solution est peu différentiable, et en général on n'a pas de solution au sens « classique » (par exemple de classe C^2 lorsque le système est régi par un opérateur différentiel du second ordre). Nous avons donc cherché à obtenir le maximum de renseignements sur la différentiabilité de la solution.

Par ailleurs, nous sommes conduits (dans le cas d'opérateurs paraboliques et hyperboliques) à préciser la notion de solution « faible » correspondant à des données peu régulières. Enfin, nous étudions en détail la dépendance de la solution en fonction des données et nous énonçons divers résultats de comparaison.

Ce travail est divisé en trois chapitres suivant la nature de l'opérateur différentiel qui régit le système.

I. PROBLÈMES UNILATÉRAUX ASSOCIÉS A DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES.

— Soit L un opérateur linéaire elliptique du second ordre sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, de frontière Γ .

Dans une première partie, nous étudions des problèmes où les contraintes unilatérales interviennent sur Ω et sont représentées par un convexe K de $L^2(\Omega)$. Étant donné f on cherche $u \in K$ vérifiant

$$(1) \quad \int_{\Omega} L u \cdot (v - u) \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot (v - u) \, dx, \quad \forall v \in K,$$

avec $u = 0$ sur Γ .

Après avoir envisagé les modèles « standards » (contraintes sur u et $|\text{grad } u|$) nous montrons que l'on peut encore obtenir des théorèmes de régularité en combinant ces contraintes. Transformés par dualité, ces résultats conduisent à des théorèmes de régularité pour de nouveaux problèmes de minimisation.

Dans une seconde partie, nous considérons les problèmes de la forme $L u = f$ sur Ω où les contraintes unilatérales apparaissent sur Γ

sous la forme d'une relation non linéaire entre u et sa dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$:

$$-\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u).$$

Nous étudions la différentiabilité de u ainsi que la dépendance de u en fonction des données f et β .

II. PROBLÈMES UNILATÉRAUX ASSOCIÉS A DES OPÉRATEURS PARABOLIQUES. — Dans un espace abstrait $\mathcal{V}$ on considère les problèmes d'évolution de la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{du}{dt}(t) + L u(t), v - u(t) \right) + \varphi(v) - \varphi(u(t)) \geq (f(t), v - u(t)), \\ \forall t \in [0, T], \quad \forall v \in \mathcal{V}; \\ u(0) = u_0; \end{array} \right.$$

où φ est une fonction sur $\mathcal{V}$ convexe s. c. i. (non différentiable en général) et L est un opérateur « elliptique » de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ (f et u_0 étant donnés).

Par analogie avec les méthodes linéaires nous commençons par introduire la notion de solution « faible » associée à (2) et nous en établissons diverses propriétés.

La théorie des semi-groupes non linéaires (au sens de Browder [5], Kato [1], Komura [1]) est un outil commode pour l'étude de la différentiabilité de u par rapport à t . Nous en rappelons certains points et nous les complétons par des résultats nouveaux relatifs aux semi-groupes engendrés par les sous-différentiels de fonctions convexes. Nous montrons ensuite sur des exemples où L est un opérateur différentiel en x , comment on peut combiner ces techniques avec celles du chapitre I pour obtenir des théorèmes de régularité en x . Nous étudions aussi le comportement de la solution u en fonction des données (f , u_0 et φ).

D'autres modèles d'évolution sont ensuite abordés; en particulier des problèmes où les contraintes unilatérales sont imposées sur $\frac{du}{dt}$ (au lieu de u).

Enfin, nous montrons que la plupart de ces méthodes peuvent encore être utilisées si l'on remplace la donnée de Cauchy [$u(0) = u_0$] par une condition de périodicité [$u(0) = u(T)$].

III. PROBLÈMES UNILATÉRAUX ASSOCIÉS A DES OPÉRATEURS HYPERBOLIQUES. — Nous envisageons uniquement le cas où des contraintes unilatérales sont imposées sur $\frac{du}{dt}$ (le cas des contraintes imposées sur u est beaucoup plus difficile à traiter et fera l'objet d'un travail ultérieur).

Nous étudions, à l'aide des techniques de semi-groupes non linéaires, la régularité de la solution de problème

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^2 u}{dt^2}(t) + L u(t), v - \frac{du}{dt}(t) \right) + \varphi(v) - \varphi\left(\frac{du}{dt}(t)\right) \geq \left(f(t), v - \frac{du}{dt}(t)\right), \\ \forall t \in [0, T], \quad \forall v \in \mathcal{V}; \\ u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0; \end{array} \right.$$

où L est un opérateur elliptique autoadjoint de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.

Nous introduisons ensuite la notion de solution faible dont nous démontrons certaines propriétés par passage à la limite à partir des résultats précédents. Nous prouvons enfin (c'est là un point délicat) l'unicité de la solution faible.

Je remercie vivement M. Lions qui m'a suggéré une grande partie des problèmes abordés dans ce travail.

Notations

$\Omega \subset \mathbf{R}^N$: ouvert borné de frontière régulière Γ .

$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables à support dans Ω .

$C^{k, \alpha}(\bar{\Omega})$: espace des fonctions dont toutes les dérivées à l'ordre k sont höldériennes d'exposant α sur $\bar{\Omega}$.

$W^{k, p}(\Omega)$: espace des fonctions dont toutes les dérivées à l'ordre k sont de puissance p sommables.

$W^{\sigma, p}(\Omega)$ ($0 < \sigma < 1$) : espace des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N + \sigma p}} dx dy < +\infty.$$

$W^{s, p}(\Omega)$ ($s = k + \sigma$) : espace des fonctions dont toutes les dérivées à l'ordre k sont dans $W^{\sigma, p}(\Omega)$.

$W_0^{s, p}(\Omega)$: fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{s, p}(\Omega)$.

$W^{-s, p'}(\Omega)$: dual de $W_0^{s, p}(\Omega)$.

$H^s(\Omega) = W^{s, 2}(\Omega)$ et $H_0^s(\Omega) = W_0^{s, 2}(\Omega)$.

$\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale, n étant la normale extérieure à Γ .

Si $p < N$, on pose $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

Si $1 < p < +\infty$, on pose $F_p(r) = |r|^{p-2} r$, $r \in \mathbf{R}$.

Soient V un espace de Banach et C un convexe fermé de V ; on pose

$$\psi_c(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in C, \\ +\infty & \text{si } u \notin C \end{cases}$$

(ψ_c est la fonction indicatrice de C).

C^0 est l'ensemble des éléments de norme minimale dans C .

Soit φ une fonction convexe de V dans $]-\infty, +\infty]$; on pose

$$\begin{aligned} D(\varphi) &= \{u \in V; \varphi(u) < +\infty\}, \\ \partial\varphi(u) &= \{f \in V'; \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u), \forall v \in V\}, \\ D(\partial\varphi) &= \{u \in D(\varphi); \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

CHAPITRE I

PROBLÈMES UNILATÉRAUX ASSOCIÉS A DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

I.1. — Inéquations variationnelles

I.1.1. FORMULATION ABSTRAITE ET NOTATIONS. — Soient V un espace de Banach réflexif sur $\mathbf{R}$ et K un sous-ensemble convexe et fermé de V . Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur monotone hémicontinu tel que

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty, v \in K} \frac{(A v, v - v_0)}{\|v\|} = +\infty \quad \text{avec } v_0 \in K.$$

On sait alors (cf. Lions-Stampacchia [4], Browder [4]) que pour tout $f \in V'$ il existe $u \in K$ tel que

$$(1.1) \quad (A u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K.$$

De plus, u est unique si

$$(A u - A v, u - v) > 0 \quad \text{pour tout } u \neq v.$$

Lorsque A est linéaire et autoadjoint, le problème (1.1) est équivalent au problème

$$\text{Min}_{u \in K} \frac{1}{2} (A u, u) - (f, u).$$

On se propose d'étudier, sur certains cas particuliers, diverses propriétés de la solution : régularité, principe du maximum, théorèmes de comparaison (dépendance de u en fonction de f et K).

Pour simplifier l'exposé on se restreindra dans la suite au cas où A est linéaire (mais un grand nombre de propriétés s'étendent à des opérateurs non linéaires).

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert borné de frontière Γ très régulière. On considère l'opérateur linéaire elliptique du second ordre :

$$L u = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u,$$

avec

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a |\xi|^2 \quad \text{p. p. } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N; \quad a > 0;$$

$$a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega), \quad c \geq 0 \quad \text{p. p. sur } \Omega \quad \text{et} \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

On suppose que pour tout $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < +\infty$, l'équation

$$(1.2) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

admet une solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ unique et qu'il existe une estimation de la forme

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Cette hypothèse est satisfaite si c est suffisamment grand et si $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ (cf. Agmon, Douglis, Nirenberg [4]).

Soit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + cuv \right) dx,$$

la forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ associée à L .

On suppose que

$$(1.3) \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V; \quad \alpha > 0,$$

où V est un espace tel que $H_0^1 \subset V \subset H^1$ avec injections continues.

On notera que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a $a(u^+, u^-) = 0$, de sorte que

$$a(u, u^+) = a(u^+, u^+), \quad \forall u \in H^1(\Omega) \quad (1).$$

Donc on a

$$(1.4) \quad a(u, u^+) \geq \alpha \|u^+\|_V^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } u^+ \in V$$

[par exemple si $V = H_0^1(\Omega)$, (1.4) est vérifié pour tout $u \in H^1(\Omega)$ tel que $u \leq 0$ sur Γ].

Enfin, on désigne par A l'opérateur de V dans V' associé à la forme bilinéaire $a(u, v)$, i. e.

$$(Au, v) = a(u, v), \quad \forall u, v \in V.$$

Nous distinguerons, en gros, deux types de problèmes.

Premier type. — $V = H_0^1(\Omega)$ et K est un convexe fermé de $H_0^1(\Omega)$ représentant des contraintes à l'intérieur de Ω , par exemple :

$$K = \{ u \in H_0^1(\Omega); u \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \}$$

ou bien

$$K = \{ u \in H_0^1(\Omega); |\text{grad } u| \leq 1 \text{ p. p. sur } \Omega \}.$$

(1) $u^+ = \text{Sup} \{ u, 0 \}$, $u^- = \text{Sup} \{ -u, 0 \}$.

Deuxième type. — $V = H^1(\Omega)$ et K est un convexe fermé de $H^1(\Omega)$ représentant des contraintes imposées sur Γ , par exemple :

$$K = \{ u \in H^1(\Omega); u \geq 0 \text{ p. p. sur } \Gamma \}.$$

Dans le premier cas, on a affaire à un problème de Dirichlet avec contraintes unilatérales à l'intérieur de Ω . Tandis que dans le second cas on cherche une fonction u solution de l'équation linéaire $Lu = f$ dans Ω et sujette à des contraintes unilatérales sur Γ . Les techniques employées et les résultats obtenus sont assez différents dans les deux cas.

Nous étudions au paragraphe I.1 les problèmes relatifs aux convexes du premier type et nous avons reporté au paragraphe I.2 l'étude de la solution d'équations linéaires avec conditions aux limites non linéaires sur Γ .

I.1.2. RÉGULARITÉ. — Nous reprenons d'abord, avec des techniques nouvelles ou bien sans démonstration, les principaux résultats de Brézis-Stampacchia [1]. Nous indiquons ensuite une méthode permettant d'obtenir de nouveaux théorèmes de régularité à partir des résultats précédents.

Soit

$$K_1 = \{ u \in L^2(\Omega); u \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \},$$

où Ψ est une fonction donnée de $L^2(\Omega)$. K_1 est un convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et on désigne par P_{K_1} la projection sur K_1 dans $L^2(\Omega)$. $P_{K_1} u = \text{Sup} \{ u, \Psi \}$ et donc $u - P_{K_1} u = -(\Psi - u)^+$.

Si $\Psi \in H^1(\Omega)$ et $\Psi \leq 0$ sur Γ , alors $K_1 \cap H_0^1(\Omega)$ est un convexe fermé non vide de $H_0^1(\Omega)$ et l'inéquation (1.1) admet une solution (faible) unique $u \in H_0^1(\Omega)$ pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$. Moyennant des hypothèses plus fortes sur Ψ et f , on obtient des informations supplémentaires sur u .

THÉORÈME I.1. — *On suppose que $\Psi \in H^1(\Omega)$, $\Psi \leq 0$ sur Γ et que $L\Psi$ est une mesure avec*

$$(1.5) \quad (L\Psi)^+ \in L^p(\Omega), \quad p \geq 2 \quad (2).$$

Alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe $u \in K_1 \cap W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ unique solution de

$$(1.6) \quad \int_{\Omega} L u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_1.$$

De plus :

$$\| u \|_{W^{2,p}} \leq C (\| f \|_{L^p} + \| (L\Psi)^+ \|_{L^p}) \quad (3).$$

(2) L'hypothèse $p \geq 2$, qui sera faite systématiquement dans la suite n'est pas essentielle, mais simplifie bien des choses.

(3) On désigne dans la suite par C diverses constantes dépendant uniquement de L, Ω, p, N .

Le théorème I.1 sera déduit du théorème I.3.

REMARQUE I.1. — Supposons que $\Psi_1, \Psi_2 \in W^{2,p}(\Omega)$.

Alors $\Psi = \text{Sup } |\Psi_1, \Psi_2|$ vérifie la condition (1.5) bien que, en général, $\Psi \notin W^{2,p}(\Omega)$.

Plus précisément, on a $L\Psi \leq \text{Sup } \{L\Psi_1, L\Psi_2\}$ au sens des mesures. Il suffit pour cela de montrer que si $\varphi \in H^2(\Omega)$, alors $L(\varphi^+)$ est une mesure et $L(\varphi^+) \leq (L\varphi)^+$ au sens des mesures.

Démonstration. — Soit

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega); u \geq 0 \text{ p. p. sur } \Omega\}.$$

Il existe $u \in K$ solution de

$$(1.7) \quad a(u, v - u) \geq a(\varphi^+, v - u) - \int_{\Omega} (L\varphi)^+ \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K.$$

Prenant dans (1.7) :

$$v = \text{Inf } \{u, \varphi^-\} = u - (u - \varphi^-)^+,$$

on obtient

$$-a(u, (u - \varphi^-)^+) \geq -a(\varphi^+, (u - \varphi^-)^+) + \int_{\Omega} (L\varphi)^+ \cdot (u - \varphi^-)^+ \, dx.$$

Donc

$$\begin{aligned} -a(u - \varphi^-, (u - \varphi^-)^+) &\geq -a(\varphi^-, (u - \varphi^-)^+) + \int_{\Omega} (L\varphi)^+ (u - \varphi^-)^+ \, dx \\ &= \int_{\Omega} (L\varphi)^+ - L\varphi \cdot (u - \varphi^-)^+ \, dx \geq 0 \end{aligned}$$

et par suite $(u - \varphi^-)^+ = 0$, soit $u \leq \varphi^-$.

Reportant dans (1.7) :

$$v = \text{Inf } \{u, \varphi^+\} = u - (u - \varphi^+)^+,$$

il vient

$$-a(u, (u - \varphi^+)^+) \geq -a(\varphi^+, (u - \varphi^+)^+) + \int_{\Omega} (L\varphi)^+ (u - \varphi^+)^+ \, dx.$$

D'où

$$-a(u - \varphi^+, (u - \varphi^+)^+) \geq \int_{\Omega} (L\varphi)^+ (u - \varphi^+)^+ \, dx > 0$$

et par conséquent $(u - \varphi^+)^+ = 0$, soit $u \leq \varphi^+$.

On en déduit que $u = 0$, et d'après (1.7) :

$$a(\varphi^+, v) \leq \int_{\Omega} (L\varphi)^+ \cdot v \, dx, \quad \forall v \in K.$$

Il en résulte, grâce à un théorème de F. Riesz-L. Schwartz que $L(\varphi^+)$ est une mesure et que $L(\varphi^+) \leq (L\varphi)^+$.

REMARQUE I.2. — Si Ω est convexe et si Ψ est une fonction convexe sur Ω , telle que $\Psi \in W^{1,p}(\Omega)$, alors

$$(L\Psi)^+ \in L^p(\Omega) \quad [\text{par exemple } \Psi(x) = -\text{dist}(x, \Gamma)].$$

A partir du théorème I.1 on peut démontrer un résultat local de régularité. On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est une solution *locale* de (1.6) si $u \in K_1 \cap H^1(\Omega)$, $L u \geq f$ sur Ω et $L u = f$ sur $\{x \in \Omega; u > \Psi\}$, plus précisément :

$$a(u, \eta(v-u)) \geq \int_{\Omega} f \eta(v-u) dx, \quad \forall v \in K_1 \cap H^1(\Omega), \quad \forall \eta \in \mathcal{O}(\Omega); \quad \eta \geq 0.$$

Il est immédiat que la solution de (1.6) est une solution locale [prendre $\varphi = (1-\eta)u + \eta w$ dans (1.6) avec $w \in K_1 \cap H^1(\Omega)$ et $0 \leq \eta \leq 1$].

PROPOSITION I.4. — On suppose que $\Psi \in W^{2,p}(\Omega)$ et que $f \in L^p(\Omega)$. Si u est une solution locale de (1.6), on a $u \in W^{2,p}(\Omega')$ pour tout ouvert Ω' tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$.

Démonstration. — Soit $\gamma \in \mathcal{O}(\Omega)$, $0 \leq \gamma < 1$ et $\gamma = 1$ sur Ω' .

On pose

$$K_{\gamma} = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \gamma \Psi \text{ p. p. sur } \Omega\}.$$

Soit $v \in K_{\gamma}$; on a

$$\begin{aligned} a(\gamma u, v - \gamma u) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (v - \gamma u) dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} u \frac{\partial}{\partial x_j} (v - \gamma u) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_i b_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\gamma u) \right) (v - \gamma u) dx + \int_{\Omega} c \gamma u (v - \gamma u) dx. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \gamma \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} (v - \gamma u) dx &= \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [\gamma (v - \gamma u)] dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} (v - \gamma u) dx. \end{aligned}$$

D'autre part, soit $w = v - \gamma u + u$; il est immédiat que $w \in H^1(\Omega) \cap K_1$. Comme u est une solution locale, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [\gamma (w - u)] dx &+ \int_{\Omega} \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \gamma (w - u) dx \\ &+ \int_{\Omega} c u \gamma (w - u) dx \geq \int_{\Omega} f \gamma (w - u) dx. \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [\gamma(v - \gamma u)] dx + \int_{\Omega} \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \gamma(v - \gamma u) dx \\ & + \int_{\Omega} cu \gamma(v - \gamma u) dx \geq \int_{\Omega} f \gamma(v - \gamma u) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} a(\gamma u, v - \gamma u) & \geq \int_{\Omega} f \gamma(v - \gamma u) dx - \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j} u \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right) + 2 \sum_i a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right) (v - \gamma u) dx \\ & + \int_{\Omega} \sum_i b_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} u (v - \gamma u) dx, \quad \forall v \in K_{\gamma}. \end{aligned}$$

Il résulte du théorème I.1 appliqué au convexe K_{γ} que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $\gamma u \in W^{2,p}(\Omega)$ et, de plus :

$$\|\gamma u\|_{W^{2,p}} \leq c(\|u\|_{W^{1,p}} + \|f\|_{L^p} + \|\gamma \Psi\|_{W^{1,p}}).$$

Un argument classique de réitération permet d'achever la démonstration.

On démontre de la même façon un résultat local de régularité jusqu'au bord. Plus précisément soit B une boule de centre $x_0 \in \Gamma$. Soit $u \in H^1(\Omega \cap B)$ avec $u = 0$ sur $\Gamma \cap B$, $u \geq \Psi$ p. p. sur $\Omega \cap B$ tel que

$$a(u, \eta(v - u)) \geq \int_{\Omega} f \eta(v - u) dx,$$

$$\forall v \in H^1(\Omega \cap B); \quad v \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \cap B; \quad v = 0 \text{ sur } \Gamma \cap B;$$

$$\forall \eta \in \mathcal{O}(B), \quad \eta \geq 0 \text{ sur } B.$$

Si $\Psi \in W^{2,p}(\Omega \cap B)$, $\Psi \leq 0$ sur $\Gamma \cap B$ et si $f \in L^p(\Omega \cap B)$, alors $u \in W^{2,p}(\Omega \cap B')$ pour tout ouvert B' tel que $\overline{B'} \subset B$.

On introduit la notation $F_t(r) = |r|^{t-2} r$, $1 < t < +\infty$; F_t est l'application de dualité de $L^t(\Omega)$ dans $L^{t'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = 1$.

Soit

$$K_2 = \{ u \in H_0^1(\Omega); |\text{grad } u| \leq 1 \text{ p. p. sur } \Omega \},$$

autrement dit :

$$K_2 = \{ u \in C(\overline{\Omega}); |u(x) - u(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \Omega \text{ et } u = 0 \text{ sur } \Gamma \}.$$

K_2 est un convexe fermé de $L^2(\Omega)$.

THÉORÈME I.2. — Pour tout $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$, il existe $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap K_2$ unique solution de

$$(1.8) \quad \int_{\Omega} L u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_2.$$

De plus :

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

Démonstration. — On utilise le résultat (technique) suivant prouvé dans Brézis-Stampacchia [4] : il existe un opérateur $\tilde{L}$ vérifiant (1.2) et (1.3), ayant même partie principale que L , i. e.

$$\tilde{L} u = - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_i \tilde{b}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \tilde{c} u,$$

tel que pour tout $u \in K_2$ et tout $\varepsilon > 0$ la solution u_ε de l'équation

$$\begin{aligned} \tilde{L} u_\varepsilon + F_{p'} \left(\frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon} \right) &= 0 \quad \text{sur } \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

appartienne à K_2 .

Soit alors $u \in K_2$ la solution faible de (1.8), i. e.

$$a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_2.$$

On a donc

$$\tilde{a}(u, v - u) \geq \int_{\Omega} f + \sum_i (\tilde{b}_i - b_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\tilde{c} - c) u \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_2$$

et par suite :

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{L} v \cdot v - u \, dx &\geq \int_{\Omega} f + \sum_i (\tilde{b}_i - b_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\tilde{c} - c) u \cdot v - u \, dx, \\ \forall v &\in K_2 \cap H^2(\Omega). \end{aligned} \right.$$

Reportant $v = u_\varepsilon$ dans (1.9), il vient

$$\|\tilde{L} u_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + C \|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}}.$$

Le passage à la limite est aisé. u_{ε_n} converge faiblement vers u dans $W^{2,p}$ et on a

$$\|\tilde{L} u\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + C \|u\|_{W^{1,p}}.$$

Comme, d'autre part :

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leq \theta \|u\|_{W^{2,p}} + C_0 \|u\|_{H^1}$$

(θ arbitrairement petit) et que

$$\|u\|_{\text{III}} \leq C \|f\|_{L^2},$$

on obtient finalement

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

REMARQUE I.3. — Les résultats de régularité obtenus aux théorèmes I.1 et I.2 sont optimaux; même si les données f et Ψ sont très régulières, la solution u n'est pas de classe C^2 en général (cf. H. Lewy-G. Stampacchia [1] et H. Brézis-G. Stampacchia [1] ⁽⁴⁾).

Le théorème suivant permet de prouver la régularité de la solution de problèmes unilatéraux où diverses contraintes sont combinées. Soit K un convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et soit K^* un convexe fermé de V . On désigne par P_K la projection sur K dans $L^2(\Omega)$ et on suppose que :

(1.10) l'opérateur $u \mapsto F_{\nu}(u - P_K u)$ est monotone dans $L^2(\Omega)$;

(1.11) $P_K(K^*) \subset K^*$;

(1.12) il existe une constante C_1 telle que

$$a(u, u - P_K u) \geq C_1 \|u - P_K u\|_{L^{p'}}, \quad \forall u \in K^*;$$

(1.13) l'inéquation variationnelle associée à K^* admet une solution régulière; plus précisément : pour tout $f \in L^p(\Omega)$, la solution $u \in K^*$ de l'inéquation

$$a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K^*$$

appartient à $W^{2,p}(\Omega)$ et on a

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C_3 (\|f\|_{L^p} + C_2).$$

THÉORÈME I.3. — On fait les hypothèses (1.10) à (1.13). Alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap K \cap K^*$ unique solution de

$$a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K \cap K^*$$

et de plus :

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C_3 (2\|f\|_{L^p} + C_1 + C_2).$$

⁽⁴⁾ Très récemment nous avons établi des résultats de régularité plus précis dans les espaces de Sobolev *fractionnaires*; en particulier si les données sont assez régulières, alors $u \in W^{s,p}(\Omega)$ pour tout $1 < p < +\infty$, $s < 2 + \frac{1}{p}$ (cf. H. Brézis, Nouveaux théorèmes de régularité pour les problèmes unilatéraux 11^e Rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens, Strasbourg 1970).

Démonstration. — Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe (d'après un résultat rappelé au paragraphe I.4.1), $u_\varepsilon \in K^*$ solution de l'inéquation

$$(1.14) \quad a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \int_{\Omega} F_{p'}\left(\frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon}\right) v - u_\varepsilon dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u_\varepsilon dx, \quad \forall v \in K^*.$$

L'hypothèse (1.13) implique que $u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ puisque $f \in L^p(\Omega)$ et $F_{p'}\left(\frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon}\right) \in L^p(\Omega)$.

De plus :

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}} \leq C_3 \left(\|f\|_{L^p} + \left\| \frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^p}^{p'-1} + C_2 \right).$$

Estimation sur u_ε . — Grâce à l'hypothèse (1.11) on peut prendre $\varphi = P_K u_\varepsilon$ dans (1.14), ce qui donne

$$a(u_\varepsilon, P_K u_\varepsilon - u_\varepsilon) + \int_{\Omega} F_{p'}\left(\frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon}\right) P_K u_\varepsilon - u_\varepsilon dx \geq \int_{\Omega} f \cdot P_K u_\varepsilon - u_\varepsilon dx.$$

D'où en utilisant (1.12), on obtient

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^{p'}}^{p'-1} - C_1 \left\| \frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^{p'}} \leq \|f\|_{L^p} \left\| \frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^{p'}}$$

et par conséquent :

$$(1.15) \quad \left\| \frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^{p'}}^{p'-1} \leq \|f\|_{L^p} + C_1.$$

On a enfin

$$\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}} \leq C_3 (2 \|f\|_{L^p} + C_1 + C_2).$$

Passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. — Soit $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tel que

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} u_{\varepsilon_n} = u \quad \text{dans } W^{2,p}(\Omega) \text{ faible,}$$

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} u_{\varepsilon_n} = u \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ fort.}$$

D'après (1.15) on a $u = P_K u$ et donc $u \in K$. Enfin comme

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u_\varepsilon dx, \quad \forall v \in K \cap K^*,$$

le passage à la limite est aisé et conduit à

$$a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u dx, \quad \forall v \in K \cap K^*.$$

APPLICATIONS. — *Démonstration du théorème I.1.* — On applique le théorème I.3 avec

$$K = K_1 \quad \text{et} \quad K^* = V = H_0^1(\Omega).$$

Pour vérifier (1.10), soient $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$; il est immédiat que

$$u_1 - P_K u_1 \geq u_2 - P_K u_2$$

et par suite :

$$F_{p'}(u_1 - P_K u_1) \geq F_{p'}(u_2 - P_K u_2)$$

sur l'ensemble $\{x \in \Omega; u_1(x) \geq u_2(x)\}$.

L'hypothèse (1.11) résulte du fait que $\Psi \leq 0$ sur Γ .

D'autre part :

$$a(u, u - P_K u) \geq a(\Psi, u - P_K u) \geq \int_{\Omega} (L\Psi)^+ \cdot u - P_K u \, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

En effet :

$$\begin{aligned} a(u, u - P_K u) &= -a(u, (\Psi - u)^+) = a(\Psi - u, (\Psi - u)^+) - a(\Psi, (\Psi - u)^+) \\ &\geq -a(\Psi, (\Psi - u)^+) = a(\Psi, u - P_K u). \end{aligned}$$

[On utilise ici (1.4) et le fait que $\Psi - u \leq 0$ sur Γ .]

Donc (1.12) a lieu avec $C_1 = \|(L\Psi)^+\|_{L^p}$.

Enfin (1.13) est vérifié avec $C_2 = 0$.

REMARQUE I.4. — Le théorème I.1 a d'abord été prouvé par H. Lewy et G. Stampacchia [1] dans le cas où $p > N$ et généralisé ensuite dans Brézis-Stampacchia [1]. La démonstration que nous avons indiquée est une variante de la méthode de pénalisation (*cf.* Lions [5]). On aurait aussi pu considérer le problème approché

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon - P_{K_1} u_\varepsilon}{\varepsilon} &= f \quad \text{sur } \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

et établir une estimation en multipliant la première équation par $F_p\left(\frac{u_\varepsilon - P_{K_1} u_\varepsilon}{\varepsilon}\right)$.

Le problème (1.6) pouvant s'écrire

$$Lu + \partial\Psi_{K_1}(u) \ni f,$$

on notera le lien avec l'approximation Yosida :

$$(\partial \Psi_{K_1})_\varepsilon u = \frac{u - P_{K_1} u}{\varepsilon} \quad \text{de } \partial \Psi_{K_1}$$

(cf. Brézis-Crandall-Pazy [4] et Brézis [5]).

Soit $K_5 = \{u \in L^2(\Omega); \Psi \leq u \leq \Psi^* \text{ p. p. sur } \Omega\}$, on a le

COROLLAIRE I.1. — On suppose que $\Psi, \Psi^* \in H^1(\Omega)$, $\Psi \leq \Psi^* \text{ p. p. sur } \Omega$, $\Psi \leq 0 \leq \Psi^* \text{ p. p. sur } \Gamma$ et que $L\Psi, L\Psi^*$ sont des mesures avec $(L\Psi)^+ \in L^p(\Omega)$ et $(L\Psi^*)^- \in L^p(\Omega)$. Alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe $u \in K_5 \cap W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ unique solution de l'inéquation

$$\int_{\Omega} L u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_5$$

et

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C (\|f\|_{L^p} + \|(L\Psi)^+\|_{L^p} + \|(L\Psi^*)^-\|_{L^p}).$$

Démonstration. — On applique le théorème I.3 avec

$$K = \{u \in L^2(\Omega); u \leq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega\}$$

et

$$K^* = \{u \in H_0^1(\Omega); u \leq \Psi^* \text{ p. p. sur } \Omega\}.$$

Les hypothèses (1.10) et (1.12) ont été vérifiées dans la démonstration du théorème I.1. La propriété (1.11) est immédiate. Enfin le théorème I.1 appliqué à $-u$ montre que l'hypothèse (1.13) est satisfaite.

REMARQUE I.5. — Le corollaire I.1 est prouvé par une méthode totalement différente dans G. Stampacchia [3].

Soit

$$K_4 = \{u \in H_0^1(\Omega); u \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \text{ et } |\text{grad } u| \leq 1 \text{ p. p. sur } \Omega\}.$$

On suppose Ψ choisi de sorte que $K_4 \neq \emptyset$.

COROLLAIRE I.2. — On fait les hypothèses du théorème I.1 et de plus :

$$(1.16) \quad |\text{grad } \Psi| \leq 1 \text{ p. p. sur } \Omega.$$

Alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe $u \in K_4 \cap W^{2,p}(\Omega)$ unique solution de l'inéquation

$$\int_{\Omega} L u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_4.$$

De plus :

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C (\|f\|_{L^p} + \|(L\Psi)^+\|_{L^p}).$$

Démonstration. — On applique le théorème I.3 avec

$$K = \{ u \in L^2(\Omega); u \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \}$$

et

$$K^* = \{ u \in H_0^1(\Omega); |\operatorname{grad} u| \leq 1 \text{ p. p. sur } \Omega \}.$$

L'hypothèse (1.16) assure que $P_K(K^*) \subset K^*$.

La propriété (1.13) est vérifiée grâce au théorème I.2.

Enfin soit

$$K_s = \{ u \in H_0^1(\Omega); \Psi \leq u \leq \Psi^* \text{ p. p. sur } \Omega \text{ et } |\operatorname{grad} u| \leq 1 \text{ p. p. sur } \Omega \},$$

où Ψ et Ψ^* sont choisis de sorte que $K_s \neq \emptyset$.

On montre aisément le

COROLLAIRE I.3. — *On fait les hypothèses du corollaire I.1 et de plus :*

$$|\operatorname{grad} \Psi| \leq 1, \quad |\operatorname{grad} \Psi^*| \leq 1 \text{ p. p. sur } \Omega.$$

Alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap K_s$ unique solution de l'inéquation

$$\int_{\Omega} L u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_s.$$

De plus :

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C (\|f\|_{L^p} + \|(L\Psi^+)_-\|_{L^p} + \|(L\Psi^*)^-\|_{L^p}).$$

REMARQUE I.6. — Sous des hypothèses à préciser, le théorème I.3 peut être appliqué avec

$$K = \{ u \in L^2(\Omega); u \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \}$$

et

$$K^* = \{ u \in H^1(\Omega); u \geq 0 \text{ p. p. sur } \Gamma \}$$

(cf. au § I.2.2 l'énoncé précis des hypothèses et résultats).

REMARQUE I.7. — Pour tout $u \in V'$ et tout $\lambda > 0$ on désigne par $J_{\lambda} u = u_{\lambda}$ la solution $u_{\lambda} \in V$ de l'équation

$$(u_{\lambda}, v) + \lambda a(u_{\lambda}, v) = (u, v), \quad \forall v \in V.$$

L'hypothèse (1.12) est en particulier vérifiée si

$$(1.17) \quad J_{\lambda}(K) \subset K,$$

autrement dit :

$$(I + \lambda A)^{-1} K \subset K.$$

Plus précisément, on a

$$a(u, u - P_K u) \geq 0, \quad \forall u \in V \text{ tel que } P_K u \in V.$$

On vérifie d'abord aisément les assertions suivantes :

$$\begin{aligned} a(J_\lambda u, u) &\geq 0, & \forall u \in V, \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} a(J_\lambda u, v) &= a(u, v), & \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

Soit alors $u \in V$ tel que $P_K u \in V$, on a

$$a(J_\lambda u - J_\lambda P_K u, u - P_K u) \geq 0,$$

d'où

$$a(J_\lambda u, u - P_K u) \geq a(J_\lambda P_K u, u - P_K u) = \left(\frac{u - J_\lambda P_K u}{\lambda}, u - P_K u \right) \geq 0$$

puisque $J_\lambda(P_K u) \in K$.

Passant à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$, il vient

$$a(u, u - P_K u) \geq 0$$

(cf. Brézis-Pazy [1] et Brézis [5] pour une réciproque partielle).

L'hypothèse (1.17) joue un rôle essentiel dans les démonstrations de Brézis-Stampacchia [1]. Suivant les exemples il est plus facile de montrer que A (ou une perturbation de A) vérifie (1.12) ou bien (1.17). Il est particulièrement aisé d'établir (1.12) si l'on connaît P_K *explicitement* (exemples $K = K_1$, $K = K_3$).

Notons enfin que l'on a encore des résultats de régularité lorsque L est remplacé par un opérateur elliptique non linéaire du second ordre (pourvu que l'on ait des informations sur la régularité de la solution de l'équation associée à cet opérateur, cf. Brézis-Stampacchia [1], Lewy-Stampacchia [2], cf. aussi Nitsche [1] et Miranda [1] où l'on trouvera des résultats de régularité pour le problème des surfaces minimales avec contraintes unilatérales).

Indiquons à titre d'exemple le résultat suivant :

Soit β un graphe maximal monotone dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tel que $0 \in D(\beta)$. On suppose que Ψ vérifie les hypothèses du théorème I.1 et que de plus il existe $\eta \in L^p(\Omega)$ avec $\eta(x) \in \beta(\Psi(x))$ p. p. sur Ω . Alors, pour tout $f \in L^p(\Omega)$ il existe une solution unique $u \in K_1 \cap W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap D(\beta)$ de l'inéquation

$$\int_{\Omega} L u + \beta(u) \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_1,$$

plus précisément il existe $g \in L^p(\Omega)$ tel que $g(x) \in \beta(u(x))$ p. p. sur Ω et

$$\int_{\Omega} L u + g \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_1.$$

(Ce résultat est prouvé dans Brézis [5] lorsque $p = 2$.)

I.1.3. RÉGULARITÉ ET DUALITÉ. — Les résultats du paragraphe I.1.2 fournissent par dualité, des théorèmes de régularité pour de nouveaux problèmes de minimisation. Pour simplifier l'exposé, considérons l'exemple suivant :

Soit $K \subset H_0^1$ un convexe fermé et soit à résoudre

$$\min_{u \in K} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} f \cdot u \, dx$$

ou encore

$$\min_{u \in H_0^1} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \Psi_K(u),$$

avec

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Introduisant la solution u_0 du problème Dirichlet :

$$\begin{aligned} -\Delta u_0 &= f \quad \text{sur } \Omega, \\ u_0 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

le problème s'écrit aussi

$$\min_{u \in H_0^1} \frac{1}{2} \|u - u_0\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \Psi_K(u).$$

Utilisant la notion de fonction convexe conjuguée et les résultats qui s'y rapportent (cf. par exemple Moreau [1], on a

$$\begin{aligned} (1.18) \quad & \min_{u \in H_0^1} \frac{1}{2} \|u - u_0\|_{H_0^1}^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \Psi_K(u) \\ &= \max_{v \in H_0^1} -\frac{1}{2} \|v - u_0\|_{H_0^1}^2 - \Psi_K^*(v) \\ &= \max_{v \in H_0^1} -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_{\Omega} f \cdot v \, dx - \Psi_K^*(v), \end{aligned}$$

où

$$\Psi_K^*(v) = \sup_{u \in K} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

D'autre part, si l'on désigne par u^* (resp. φ^*) la valeur de u (resp. φ) pour laquelle le minimum (resp. maximum) est atteint en (1.18), on a $u^* + \varphi^* = u_0$. En particulier si $f \in L^p(\Omega)$ et si l'on sait que $u^* \in W^{2,p}(\Omega)$, alors $\varphi^* \in W^{2,p}(\Omega)$.

APPLICATIONS.

THÉORÈME I.4. — Soit $q \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$, $q \leq 0$ sur Γ et soit $f \in L^p(\Omega)$, alors le problème

$$\min_{\substack{u \in H_0^1 \\ \Delta u \geq 0 \text{ p. p. sur } \Omega}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} f \cdot u \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} q \, d\Gamma,$$

admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Démonstration. — Soit $\Psi \in W^{2,p}(\Omega)$ tel que $\Psi = q$ sur Γ . On applique les remarques qui précèdent avec

$$K = \{ u \in H_0^1(\Omega); u \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \},$$

f étant remplacé par $f - \Delta \Psi$.

On a donc

$$\begin{aligned} & \min_{u \in H_0^1} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} (f - \Delta \Psi) u \, dx + \Psi_K(u) \\ &= \max_{v \in H_0^1} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_{\Omega} (f - \Delta \Psi) v \, dx - \Psi_K^*(v). \end{aligned}$$

Le théorème I.1 assure que $u^* \in W^{2,p}(\Omega)$ et par suite $\varphi^* \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Or, si $\varphi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on a

$$\Psi_K^*(v) = \sup_{u \in K} \int_{\Omega} \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \sup_{u \in K} - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx,$$

d'où

$$\Psi_K^*(v) = \begin{cases} - \int_{\Omega} \Psi \Delta v \, dx = - \int_{\Omega} \Delta \Psi v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} \Psi \, d\Gamma & \text{si } \Delta v \geq 0 \text{ p. p. sur } \Omega, \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Donc φ^* est la solution du problème

$$\min_{\substack{\varphi \in H^2 \cap H_0^1 \\ \Delta \varphi \geq 0 \text{ p. p. sur } \Omega}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} f \cdot \varphi \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Psi \, d\Gamma.$$

THÉORÈME I.5. — Soient $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ p. p. sur Ω et $q \in W^{2-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ avec $|q| \leq \varphi$ p. p. sur Γ .

Alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$ le problème

$$\min_{u \in W^2,p(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \int_{\Omega} |\Delta u| \rho \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} q \, d\Gamma$$

admet une solution unique $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Démonstration. — Soit $\tilde{q} \in W^{2,p}(\Omega)$ tel que $\tilde{q} = q$ sur Γ . On pose $\Psi = \tilde{q} - \rho$ et $\Psi^* = \tilde{q} + \rho$. Grâce aux hypothèses du théorème I.5 on a $\Psi \leq \Psi^*$ p. p. sur Ω , $\Psi \leq 0 \leq \Psi^*$ p. p. sur Γ et $\Psi, \Psi^* \in W^{2,p}(\Omega)$. On applique les remarques préliminaires au convexe

$$K = \{ u \in H_0^1(\Omega); \Psi \leq u \leq \Psi^* \text{ p. p. sur } \Omega \},$$

f étant remplacé par $f - \Delta \tilde{q}$.

On a donc

$$\begin{aligned} \min_{u \in K} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} (f - \Delta \tilde{q}) u \, dx + \Psi_K(u) \\ = \max_{v \in K} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_{\Omega} (f - \Delta \tilde{q}) v \, dx - \Psi_K^*(v). \end{aligned}$$

Le corollaire I.1 assure que $u^* \in W^{2,p}(\Omega)$, or si $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \Psi_K^*(v) &= \sup_{u \in K} \int_{\Omega} \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \sup_{u \in K} - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_{\Omega} (\Delta v)^- \Psi^* - (\Delta v)^+ \Psi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{|\Delta v| - \Delta v}{2} \right) \Psi^* - \left(\frac{|\Delta v| + \Delta v}{2} \right) \Psi \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\Delta v| \rho \, dx - \int_{\Omega} \Delta v \tilde{q} \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\Delta v| \rho \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} \tilde{q} \, d\Gamma - \int_{\Omega} v \Delta \tilde{q} \, dx. \end{aligned}$$

Donc v^* est la solution du problème

$$\min_{v \in W^2,p(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_i \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx + \int_{\Omega} |\Delta v| \rho \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} q \, d\Gamma.$$

REMARQUE I.8. — On obtiendrait des résultats analogues en « dualisant » les problèmes correspondant à K_2, K_4, K_5 . Dans ces cas, toutefois, nous ne savons pas écrire Ψ_K^* explicitement en fonction de u .

I.1.4. PRINCIPE DU MAXIMUM ET THÉORÈMES DE COMPARAISON. — Le principe du maximum, bien connu pour les équations elliptiques du second ordre s'étend à certaines inéquations variationnelles. L'outil essentiel est la méthode des troncatures développées par G. Stampacchia [2]. Pour $f \in \mathcal{W}'(\Omega)$, on considère

$$M(f) = \left\{ \xi \in \mathbf{R}; \int f \cdot \varphi \, dx \leq \xi \int \varphi \, dx, \forall \varphi \in \mathcal{W}(\Omega), \varphi \geq 0 \right\}$$

et on pose

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} f &= \begin{cases} \inf M(f) & \text{si } M(f) \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{si } M(f) = \emptyset; \end{cases} \\ \inf_{\Omega} f &= -\sup_{\Omega} (-f). \end{aligned}$$

Nous commençons par quelques résultats simples.

PROPOSITION I.2. — Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et soit $u \in K_1 \cap H_0^1(\Omega)$ (resp. K_*) la solution de

$$(1.19) \quad a(u, v - u) + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_1 \cap H_0^1 \quad (\text{resp. } K_*).$$

Alors si $\lambda > 0$ on a p. p. sur Ω ,

$$(1.20) \quad \min \left\{ 0, \frac{1}{\lambda} \inf_{\Omega} f \right\} \leq u \leq \max \left\{ 0, \sup_{\Omega} \Psi, \frac{1}{\lambda} \sup_{\Omega} f \right\}.$$

De plus si $\lambda \geq 0$ et $f \geq 0$ sur Ω (resp. $f \leq 0$ sur Ω), on a $u \geq 0$ p. p. sur Ω (resp. $u \leq \max \{ 0, \sup_{\Omega} \Psi \}$).

Démonstration. — Soit $k = \max \left\{ 0, \sup_{\Omega} \Psi, \frac{1}{\lambda} \sup_{\Omega} f \right\}$ et soit

$$v = \min \{ u, k \} = u - (u - k)^+.$$

Il est clair que $v \in K_1 \cap H_0^1$ (resp. K_*); reportant v dans (1.19), on obtient

$$a(u, -(u - k)^+) - \lambda \int_{\Omega} u (u - k)^+ \, dx \geq - \int_{\Omega} f (u - k)^+ \, dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} a(u - k, (u - k)^+) + \lambda \int_{\Omega} |(u - k)^+|^2 \, dx &\leq a(u, (u - k)^+) \\ &+ \lambda \int_{\Omega} |(u - k)^+|^2 \, dx \leq \int_{\Omega} (f - \lambda k) (u - k)^+ \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

Donc $(u - k)^+ = 0$ et $u \leq k$ p. p. sur Ω .

De même, soit $k' = \text{Min} \left\{ 0, \frac{1}{\lambda} \text{Inf}_{\Omega} f \right\}$ et soit

$$v = \text{Max} \{ u, k' \} = u + (k' - u)^+.$$

Il est clair que $v \in K_1 \cap H_0^1$ (resp. K_4); reportant v dans (1.19) on montre que $u \geq k'$ p. p. sur Ω .

Enfin si $f \geq 0$ (resp. $f \leq 0$) et $\lambda \geq 0$ on considère une suite $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ et on applique (1.20) à la solution correspondante u_n . Le passage à la limite est immédiat et conduit à $u \geq 0$ (resp. $u \leq \text{Max} \{ 0, \text{Sup}_{\Omega} \Psi \}$).

On démontre de la même façon les

PROPOSITION I.3. — Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et soit $u \in K_2$ la solution de

$$a(u, v - u) + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_2.$$

Alors si $\lambda > 0$, on a p. p. sur Ω .

$$\text{Min} \left\{ 0, \frac{1}{\lambda} \text{Inf}_{\Omega} f \right\} \leq u \leq \text{Max} \left\{ 0, \frac{1}{\lambda} \text{Sup}_{\Omega} f \right\}.$$

De plus si $\lambda \geq 0$ et $f \geq 0$ sur Ω (resp. $f \leq 0$ sur Ω), on a $u \geq 0$ p. p. sur Ω (resp. $u \leq 0$ p. p. sur Ω).

PROPOSITION I.4. — Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et soit $u \in K_3 \cap H_0^1(\Omega)$ (resp. K_5) la solution de

$$a(u, v - u) + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_3 \cap H_0^1(\Omega) \quad (\text{resp. } K_5).$$

Alors si $\lambda > 0$ on a p. p. sur Ω ,

$$\text{Min} \left\{ 0, \text{Inf}_{\Omega} \Psi, \frac{1}{\lambda} \text{Inf}_{\Omega} f \right\} \leq u \leq \text{Max} \left\{ 0, \text{Sup}_{\Omega} \Psi, \frac{1}{\lambda} \text{Sup}_{\Omega} f \right\}.$$

De plus si $\lambda \geq 0$ et $f \geq 0$ sur Ω (resp. $f \leq 0$ sur Ω) on a $u \geq \text{Min} \{ 0, \text{Inf}_{\Omega} \Psi \}$ (resp. $u \leq \text{Max} \{ 0, \text{Sup}_{\Omega} \Psi \}$).

REMARQUE I.9. — On obtient à l'aide de méthodes du même genre, mais plus élaborées, des estimations sur $|\text{grad } u|$. Indiquons à titre d'exemple le résultat suivant prouvé dans Brézis-Sibony [1].

On suppose que $\Psi, \Psi^* \in H_0^{1,\infty}(\Omega)$ avec $\Psi \leq \Psi^*$ p. p. sur Ω et que $Lu = -\Delta u$. Alors pour tout $f \in H_0^{1,\infty}(\Omega)$ la solution $u \in K_2 \cap H_0^1(\Omega)$ de l'inéquation

$$a(u, v - u) + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_2 \cap H_0^1$$

vérifie

$$\sup_{\Omega} |\text{grad } u| \leq \text{Max} \left\{ \sup_{\Omega} |\text{grad } \Psi|, \sup_{\Omega} |\text{grad } \Psi^*|, \sup_{\Omega} \frac{1}{\lambda} |\text{grad } f| \right\}.$$

THÉORÈMES DE COMPARAISON. — Soit $V \subset L^2(\Omega)$ avec injection continue et dense et soit $K \subset V$ un convexe fermé de V . On suppose que K vérifie la propriété suivante :

$$(1.21) \quad \text{Max} \{u, \hat{u}\} \in K \quad \text{et} \quad \text{Min} \{u, \hat{u}\} \in K, \quad \forall u, \hat{u} \in K.$$

On notera en particulier que (1.21) est réalisé avec $V = L^2(\Omega)$, $K = K_i$, $i = 1, 2, \dots, 5$ ou bien $V = H_0^1(\Omega)$ et $K = K_i \cap H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

PROPOSITION I.5. — On fait l'hypothèse (1.21). Soient $u, \hat{u} \in K$ et $f \in \partial\Psi_K(u)$, $\hat{f} \in \partial\Psi_K(\hat{u})$, i. e. $f, \hat{f} \in V'$ et

$$(1.22) \quad (f, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in K;$$

$$(1.23) \quad (\hat{f}, v - \hat{u}) \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

Alors on a

$$(1.24) \quad (f - \hat{f}, (u - \hat{u})^+) \geq 0,$$

autrement dit $\partial\Psi_K$ est T-monotone au sens de Brézis-Stampacchia [1].

Démonstration. — On prend $\nu = \text{Min} \{u, \hat{u}\} = u - (u - \hat{u})^+$ dans (1.22) et $\nu = \text{Max} \{u, \hat{u}\} = \hat{u} + (u - \hat{u})^+$ dans (1.23), ce qui donne

$$(f, (u - \hat{u})^+) \geq 0 \quad \text{et} \quad -(\hat{f}, (u - \hat{u})^+) \geq 0.$$

Par addition, on en déduit (1.24).

REMARQUE I.10. — Plus généralement si φ est une fonction convexe s. c. i. sur V à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ telle que

$$(1.25) \quad \varphi(\text{Min} \{u, \hat{u}\}) + \varphi(\text{Max} \{u, \hat{u}\}) \leq \varphi(u) + \varphi(\hat{u}), \quad \forall u, \hat{u} \in V,$$

alors $\partial\varphi$ est T-monotone.

Exemple 1. — Soit $V = L^2(\Omega)$ et soit j une fonction convexe s. c. i. sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, $j \not\equiv +\infty$.

On pose

$$\varphi(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} j(u) dx & \text{si } j(u) \in L^1(\Omega), \\ +\infty & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

alors φ est une fonction convexe s. c. i. sur $L^2(\Omega)$ (cf. appendice I) et φ vérifie la propriété (1.25).

Exemple 2 :

$$V = H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \varphi(u) = \int_{\Omega} \sum a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx.$$

COROLLAIRE I.4. — *La projection sur K_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) dans $L^2(\Omega)$ est isotone i. e. $f \geq \hat{f}$ p. p. dans Ω implique*

$$\text{Proj}_{K_i} f \geq \text{Proj}_{K_i} \hat{f} \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

Démonstration. — Soit

$$u = \text{Proj}_{K_i} f \quad \text{et} \quad \hat{u} = \text{Proj}_{K_i} \hat{f}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f - u \cdot v - u dx &\leq 0, \quad \forall v \in K_i, \\ \int_{\Omega} \hat{f} - \hat{u} \cdot v - \hat{u} dx &\leq 0, \quad \forall v \in K_i. \end{aligned}$$

D'après la proposition I.5, on a

$$\int_{\Omega} \hat{f} - f - \hat{u} + u \cdot (\hat{u} - u)^+ dx \geq 0.$$

D'où

$$\int_{\Omega} |(\hat{u} - u)^+|^2 dx \leq \int_{\Omega} (\hat{f} - f) (\hat{u} - u)^+ dx \leq 0$$

et par conséquent $(\hat{u} - u)^+ = 0$, soit $\hat{u} \leq u$.

COROLLAIRE I.5. — *On suppose que $V = H_0^1(\Omega)$ et que K vérifie (1.21). Soient $f, \hat{f} \in H^{-1}(\Omega)$ avec $f \geq \hat{f}$ et soient $u, \hat{u} \in K$ les solutions respectives des inéquations*

$$\begin{aligned} a(u, v - u) &\geq (f, v - u), \quad \forall v \in K, \\ a(\hat{u}, v - \hat{u}) &\geq (\hat{f}, v - \hat{u}), \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Alors $u \geq \hat{u}$ p. p. sur Ω .

Démonstration. — On a $(f - Au, v - u) \leq 0, \forall v \in K$ et $(\hat{f} - A\hat{u}, v - \hat{u}) \leq 0, \forall v \in K$, ce qui implique d'après la proposition I.5 :

$$(\hat{f} - f - A\hat{u} + Au, (\hat{u} - u)^+) = 0$$

et donc

$$a(\hat{u} - u, (\hat{u} - u)^+) \leq (\hat{f} - f, (\hat{u} - u)^+) \leq 0.$$

Par suite $(\hat{u} - u)^+ = 0$ et $\hat{u} \leq u$.

REMARQUE I.11. — Des théorèmes de comparaison avaient été établis précédemment dans T. W. Ting [1] et H. Lanchon [4]. Supposons maintenant que l'on remplace l'hypothèse (1.21) par l'hypothèse plus forte (1.26) :

$$(1.26) \quad \text{Max} \{u, \hat{u} - k\} \in K, \quad \text{Min} \{u + k, \hat{u}\} \in K$$

pour tout $u, \hat{u} \in K$ et pour tout $k \in \mathbf{R}, k \geq 0$ [on notera que (1.26) est vérifié avec $K = K_i \cap H_0^1(\Omega), i = 1, 2, \dots, 5$]. Soient alors $f, \hat{f} \in H^{-1}(\Omega)$ et $u, \hat{u} \in K$ les solutions respectives de

$$(1.27) \quad a(u, v - u) + \lambda \int_{\Omega} u \cdot v - u \, dx \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K$$

$$(1.28) \quad a(\hat{u}, v - \hat{u}) + \lambda \int_{\Omega} \hat{u} \cdot v - \hat{u} \, dx \geq (\hat{f}, v - \hat{u}), \quad \forall v \in K$$

Si $\lambda > 0$, on a

$$\text{Min} \left\{ 0, \frac{1}{\lambda} \text{Inf}_{\Omega} (f - \hat{f}) \right\} \leq u - \hat{u} \leq \text{Max} \left\{ 0, \frac{1}{\lambda} \text{Sup}_{\Omega} (f - \hat{f}) \right\}.$$

Il suffit pour cela de poser

$$k = \text{Max} \left\{ 0, \frac{1}{\lambda} \text{Sup}_{\Omega} (f - \hat{f}) \right\},$$

de reporter $v = \text{Min} \{u, \hat{u} + k\} = u - (u - \hat{u} - k)^+$ dans (1.27) et $v = \text{Max} \{u - k, \hat{u}\} = \hat{u} + (u - \hat{u} - k)^+$ dans (1.28). Après addition on obtient le résultat.

Soit $V \subset L^2(\Omega)$ et soit K un convexe fermé de V . On fait maintenant l'hypothèse

$$(1.29) \quad \begin{cases} \text{pour tout } u, \hat{u} \in K \text{ et pour toute fonction } \eta: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ telle que} \\ \eta(0) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \eta(r_1) - \eta(r_2) \leq r_1 - r_2, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbf{R}, \\ \text{on a } u + \eta(\hat{u} - u) \in K. \end{cases}$$

REMARQUE I.12. — L'hypothèse (1.29) implique en particulier (1.26) et donc (1.21) [il suffit de prendre $\eta(r) = (r - k)^+$ et $\eta(r) = -(-r - k)^+$].

REMARQUE I.13. — On vérifie aisément que l'hypothèse (1.29) est satisfaite avec $V = L^2(\Omega)$ et $K = K_i, i = 1, 2, \dots, 5$ ou bien $V = H_0^1(\Omega)$ et $K = K_i \cap H_0^1(\Omega)$.

PROPOSITION I.6. — On fait l'hypothèse (1.29). Soient $u \in K$ et $f \in \partial\Psi_K(u)$ i. e. $f \in V'$ et

$$(1.30) \quad (f, v - u) \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

Alors

$$(1.31) \quad (f, \varphi(v - u)) \geq 0, \quad \forall v \in K$$

pour toute fonction φ lipschitzienne croissante avec $\varphi(0) = 0$.

En particulier si $u, \hat{u} \in K, f \in \partial\Psi_K(u), \hat{f} \in \partial\Psi_K(u)$, on a

$$(\hat{f} - f, \varphi(\hat{u} - u)) \geq 0$$

pour toute fonction φ lipschitzienne croissante avec $\varphi(0) = 0$.

Démonstration. — Soit L le module de lipschitz de φ et soit $\eta = \frac{\varphi}{L}$; reportant $v = u + \eta(\varpi - u)$ avec $\varpi \in K$, dans (1.30) on en déduit (1.31). Enfin si $(f, v - u) \leq 0, \forall v \in K$ et $(\hat{f}, v - \hat{u}) \leq 0, \forall v \in K$, on a d'après ce qui précède, $(f, \varphi(v - u)) \leq 0, \forall v \in K$ et donc en particulier $(f, \varphi(\hat{u} - u)) \leq 0$. Remplaçant $\varphi(r)$ par $-\varphi(-r)$ on a aussi

$$-(\hat{f}, \varphi(\hat{u} - v)) \leq 0, \quad \forall v \in K \quad \text{et donc} \quad -(\hat{f}, \varphi(\hat{u} - u)) \leq 0.$$

Par addition, il vient $(\hat{f} - f, \varphi(\hat{u} - u)) \geq 0$.

PROPOSITION I.7. — On fait l'hypothèse (1.29); soit $u \in K \cap L^p(\Omega)$ et soit $f \in L^p(\Omega), f \in \partial\Psi_K(u)$. Alors

$$\int_{\Omega} f \cdot F_p(v - u) dx \leq 0, \quad \forall v \in K \cap L^p.$$

En particulier si $u, \hat{u} \in K \cap L^p(\Omega)$ et $f, \hat{f} \in L^p(\Omega), f \in \partial\Psi_K(u), \hat{f} \in \partial\Psi_K(\hat{u})$, alors

$$\int_{\Omega} f - \hat{f} \cdot F_p(u - \hat{u}) dx \geq 0.$$

Autrement dit l'opérateur multivoque T de $L^p(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ défini par

$$f \in T u \Leftrightarrow \left\{ f \in L^p(\Omega), \quad u \in K \cap L^p(\Omega), \quad \int_{\Omega} f \cdot v - u dx \leq 0, \quad \forall v \in K \right\}$$

est accréitif au sens de Browder [5], Kato [1].

Démonstration. — Soit $(F_p)_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, la régularisée Yosida de F_p , i. e. $(F_p)_\varepsilon(r) = r_\varepsilon$, où r_ε est la solution de l'équation

$$r_\varepsilon + \varepsilon |r_\varepsilon|^{\nu-2} r_\varepsilon = r.$$

$(F_p)_\varepsilon$ est lipschitzienne croissante, $(F_p)_\varepsilon(0) = 0$, et d'après la proposition I.6, on a

$$\int_{\Omega} f \cdot (F_p)_\varepsilon(v - u) dx \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F_p)_\varepsilon(v - u) = F_p(v - u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ lorsque $v - u \in L^p(\Omega)$, on en déduit le résultat.

REMARQUE I.14. — L'opérateur L de domaine $D(L) = W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est accréatif dans $L^p(\Omega)$; en effet, il est immédiat que $(I + \lambda L)^{-1}$, $\lambda > 0$, est une contraction dans $L^2(\Omega)$ et dans $L^\infty(\Omega)$ et donc par interpolation dans $L^p(\Omega)$ ($2 < p < +\infty$). Enfin, supposons que tout $f \in L^p(\Omega)$, la solution $u \in K \cap H_0^1(\Omega)$ de l'inéquation

$$a(u, v - u) \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u dx, \quad \forall v \in K \cap H_0^1$$

appartienne à $W^{2,p}(\Omega)$ (par exemple $K = K_i$ avec les hypothèses faites au paragraphe I.1.2). Alors l'opérateur $L + T$ (multivoque) de domaine $W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap K$ est m -accréatif i. e. $R(I + \lambda(L + T)) = L^p(\Omega)$ pour tout $\lambda > 0$ et $(I + \lambda(L + T))^{-1}$ est une contraction dans $L^p(\Omega)$.

PROPOSITION I.8. — Soit $2 \leq p < +\infty$ et soit K un convexe fermé de $L^2(\Omega)$ vérifiant (1.29) et tel que $K \cap L^p(\Omega) \neq \emptyset$. Alors la projection sur K dans $L^2(\Omega)$ est une contraction dans $L^p(\Omega)$ i. e. si $f, \hat{f} \in L^p(\Omega)$ alors $\text{Proj}_K f, \text{Proj}_K \hat{f} \in L^p(\Omega)$ et $\|\text{Proj}_K f - \text{Proj}_K \hat{f}\|_{L^p} \leq \|f - \hat{f}\|_{L^p}$.

Démonstration. — Lorsque $p = +\infty$ le résultat s'obtient à partir de la remarque I.11. Dans le cas général, soient $f_n, \hat{f}_n \in L^\infty(\Omega)$ tels que $f_n \rightarrow f$, $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ dans $L^p(\Omega)$. D'après ce qui précède, on a $u_n - \hat{u}_n \in L^\infty(\Omega)$, et grâce à la proposition I.6 :

$$\int_{\Omega} f_n - \hat{f}_n - u_n + \hat{u}_n \cdot \varphi(u_n - \hat{u}_n) dx \geq 0$$

pour toute fonction φ lipschitzienne croissante avec $\varphi(0) = 0$. Toutefois le choix $\varphi = F_p$ est licite puisque F_p est lipschitzien sur les ensembles bornés et $u_n - \hat{u}_n \in L^\infty(\Omega)$. D'où

$$\|u_n - \hat{u}_n\|_{L^p} \leq \|f_n - \hat{f}_n\|_{L^p}.$$

Le passage à la limite est immédiat et montre que $u - \hat{u} \in L^p(\Omega)$ avec

$$\|u - \hat{u}\|_{L^p} \leq \|f - \hat{f}\|_{L^p}.$$

Enfin comme $K \cap L^p(\Omega) \neq \emptyset$ on peut choisir $\hat{f} \in K \cap L^p(\Omega)$, d'où $\hat{u} = \hat{f} \in L^p(\Omega)$ et par suite $u = \text{Proj}_K f \in L^p(\Omega)$ pour tout $f \in L^p(\Omega)$.

REMARQUE I.15. — On peut aussi démontrer la proposition I.8 en procédant par interpolation non linéaire (cf. Browder [4] et Peetre [1]) entre $p = 2$ et $p = +\infty$.

THÉORÈME I.6. — Soit K un convexe fermé de $H_0^1(\Omega)$ vérifiant (1.29).

Soient

$$f = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_i},$$

avec $f_i, \hat{f}_i \in L^p(\Omega)$.

Soient u et $\hat{u} \in K$ les solutions respectives de

$$(1.32) \quad a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K,$$

$$(1.33) \quad a(\hat{u}, v - \hat{u}) \geq (\hat{f}, v - \hat{u}), \quad \forall v \in K.$$

Alors si $p > N$, on a $u - \hat{u} \in L^\infty(\Omega)$, avec

$$(1.34) \quad \|u - \hat{u}\|_{L^\infty} \leq C \sum_{i=1}^N \|f_i - \hat{f}_i\|_{L^p}$$

et si $2 \leq p < N$, on a

$$u - \hat{u} \in L^{p^*}(\Omega) \quad \left(\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \right),$$

avec

$$(1.35) \quad \|u - \hat{u}\|_{L^{p^*}} \leq C \sum_{i=1}^N \|f_i - \hat{f}_i\|_{L^p}.$$

Démonstration. — Supposons d'abord que $p > N$. On reporte

$$v = \text{Min} \{ u, \hat{u} + k \} = u - (u - \hat{u} - k)^+$$

dans (1.32) et $v = \text{Max} \{ u - k, \hat{u} \} = \hat{u} + (u - \hat{u} - k)^+$ dans (1.33) avec $k \geq 0$.

Après addition, il vient

$$a(u - \hat{u}, (u - \hat{u} - k)^+) \leq (f - \hat{f}, (u - \hat{u} - k)^+).$$

et donc

$$a((u - \hat{u} - k)^+, (u - \hat{u} - k)^+) \leq (f - \hat{f}, (u - \hat{u} - k)^+).$$

Posant pour simplifier $v = u - \hat{u}$ et $A(k) = \{x \in \Omega; v(x) \geq k\}$, on a donc

$$\sum_{i=1}^N \int_{A(k)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq C \sum_{i=1}^N \int_{A(k)} |f_i - \hat{f}_i|^2 dx.$$

De là on en déduit (1.34) comme dans la démonstration du lemme 7.3 de Hartman-Stampacchia [1].

Lorsque $2 \leq p < N$, on procède de la manière suivante : supposant d'abord que $f_i, \hat{f}_i \in L^t(\Omega)$, $t > N$, on établit l'estimation (1.35) avec une constante C indépendante de t . Ensuite, pour le cas général, on approxime dans $L^p(\Omega)$, f_i et $\hat{f}_i$ par des fonctions de $L^t(\Omega)$, $t > N$; le passage à la limite est immédiat.

On est donc ramené à établir (1.35) en supposant de plus que $u - \hat{u} \in L^\infty(\Omega)$.

Grâce à la proposition I.6, on a

$$a(u - \hat{u}, \varphi(u - \hat{u})) \leq (f - \hat{f}, \varphi(u - \hat{u}))$$

pour toute fonction φ lipschitzienne croissante telle que $\varphi(0) = 0$.

On prend

$$\varphi(r) = |r|^{q-2} r, \quad \text{avec } q = \frac{p(N-2)}{N-p} \quad (*),$$

de sorte que

$$\frac{q 2^*}{2} = \frac{q N}{N-2} = \frac{p N}{N-p} = p^* = \frac{p(q-2)}{p-2},$$

où

$$\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad p \leq q \leq p^*.$$

Ce choix de φ est licite bien que φ soit seulement localement lipschitzienne car $u - \hat{u} \in L^\infty(\Omega)$.

(*) Nous avons adapté une méthode de L. Tartar.

En posant $v = u - \hat{u}$, on obtient alors une estimation de la forme

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |v|^{q-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |v|^q + \sum_{i=1}^N |v|^{q-1} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| + |f_i - \hat{f}_i| \cdot |v|^{q-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \quad (6).$$

Soit encore, grâce à Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |v|^{q-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |v|^q + \sum_{i=1}^N |f_i - \hat{f}_i|^2 |v|^{q-2} dx.$$

Appliquant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} |f_i - \hat{f}_i|^2 |v|^{q-2} dx \leq \sum_{i=1}^N \left(\int_{\Omega} |f_i - \hat{f}_i|^p \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{p(q-2)}{p-2}} \right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Comme d'autre part $H_0^1(\Omega)$ est inclus avec injection continue dans $L^{2^*}(\Omega)$ (Sobolev), on a

$$\left(\int_{\Omega} |\Psi|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right|^2 dx, \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Omega).$$

Choissant $\Psi = |v|^{\frac{q-2}{2}} v$ dans l'inégalité précédente, on en déduit que

$$\left(\int_{\Omega} |v|^{\frac{q \cdot 2^*}{2}} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N |v|^{q-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx.$$

Puisque $\frac{q \cdot 2^*}{2} = p^* = \frac{p(q-2)}{p-2}$, on obtient finalement

$$\|v\|_{L^{p^*}}^q \leq C \left(\|v\|_{L^q}^q + \sum_{i=1}^N \|f_i - \hat{f}_i\|_{L^p}^2 \|v\|_{L^{p^*}}^{q-2} \right).$$

D'où il résulte que

$$\|v\|_{L^{p^*}}^q \leq C \left(\|v\|_{L^q}^q + \sum_{i=1}^N \|f_i - \hat{f}_i\|_{L^p}^q \right),$$

soit

$$\|v\|_{L^{p^*}} \leq C \left(\|v\|_{L^q} + \sum_{i=1}^N \|f_i - \hat{f}_i\|_{L^p} \right).$$

(6) Dans la suite on désigne par C diverses constantes dépendant uniquement de Ω , p , N et des coefficients de L .

Un argument classique de « réitération » permet d'établir que

$$\|v\|_{L^{p^*}} \leq C \sum_{i=1}^N \|f_i - \hat{f}_i\|_{L^p}.$$

REMARQUE I.16. — Lorsque $p < N$, la première partie de la démonstration conduit au résultat suivant ; $u - \hat{u} \in L^{p^*}(\Omega)$ faible lorsque $f_i - \hat{f}_i \in L^p(\Omega)$ avec l'estimation correspondante sur les normes faibles. On pourrait peut être déduire de là, par interpolation non linéaire, la seconde partie du théorème I.6.

REMARQUE I.17. — Le théorème I.6 ne permet pas de conclure que u et $\hat{u}$ sont séparément dans $L^\infty(\Omega)$ [resp. $L^{p^*}(\Omega)$]. On peut toutefois l'affirmer moyennant des hypothèses supplémentaires ; par exemple si $K = K_1 \cap H_0^1(\Omega)$ et si $\Psi \in L^\infty(\Omega)$ alors $f \in W^{-1,p}(\Omega)$ implique

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\Omega) & \text{si } p > N, \\ u &\in L^{p^*}(\Omega) & \text{si } 2 \leq p < N. \end{aligned}$$

En effet, prenant $\hat{f} = 0$, on a d'après la proposition I.2, $\hat{u} \in L^\infty(\Omega)$ et par suite $u \in L^\infty(\Omega)$ [resp. $u \in L^{p^*}(\Omega)$] (cf. Da Veiga [2] pour un résultat similaire).

DÉPENDANCE DE u EN K . — Soient K et $\hat{K}$ deux convexes fermés de $H_0^1(\Omega)$.

On suppose que

$$(1.36) \quad \text{Max} \{u, \hat{u}\} \in K \quad \text{et} \quad \text{Min} \{u, \hat{u}\} \in \hat{K}, \quad \forall u \in K, \quad \forall \hat{u} \in \hat{K}.$$

PROPOSITION I.9. — On fait l'hypothèse (1.36). Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et soient $u \in K$, $\hat{u} \in \hat{K}$ les solutions respectives de

$$(1.37) \quad a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K,$$

$$(1.38) \quad a(\hat{u}, v - \hat{u}) \geq (f, v - \hat{u}), \quad \forall v \in \hat{K}.$$

Alors

$$u \geq \hat{u} \quad p. p. \text{ sur } \Omega.$$

Démonstration. — Nous suivons ici une méthode due à Haugazeau [4]. On reporte

$$v = \text{Max} \{u, \hat{u}\} = u + (\hat{u} - u)^+ \quad \text{dans (1.37)}$$

et

$$\hat{v} = \text{Min} \{u, \hat{u}\} = \hat{u} - (\hat{u} - u)^+ \quad \text{dans (1.38)}.$$

Il vient après addition :

$$a(\hat{u} - u, (\hat{u} - u)^+) \leq 0$$

et donc $(\hat{u} - u)^+ = 0$, soit $\hat{u} \leq u$.

Exemple :

$$K = \{ v \in H_0^1(\Omega); v \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \} \quad \text{et} \quad \hat{K} = \{ v \in H_0^1(\Omega); v \geq \hat{\Psi} \text{ p. p. sur } \Omega \}.$$

Si $\Psi \geq \hat{\Psi}$ p. p. sur Ω , alors $u \geq \hat{u}$ p. p. sur Ω . En fait, on a dans ce cas un résultat plus précis :

$$\min \{ 0, \inf_{\Omega} (\Psi - \hat{\Psi}) \} \leq u - \hat{u} \leq \max \{ 0, \sup_{\Omega} (\Psi - \hat{\Psi}) \}.$$

En effet, soit

$$k = \max \{ 0, \sup_{\Omega} (\Psi - \hat{\Psi}) \}.$$

Reportant $v = \min \{ u, \hat{u} + k \} \in K$ dans (1.37) et

$$v = \max \{ u - k, \hat{u} \} \in \hat{K}$$

dans (1.38) on en déduit après addition que $u - \hat{u} \leq k$.

REMARQUE I.18. — Plus généralement, soient φ et $\hat{\varphi}$ deux fonctions convexes s. c. i. sur V telles que

$$\varphi(\max \{ u, \hat{u} \}) + \hat{\varphi}(\min \{ u, \hat{u} \}) \leq \varphi(\hat{u}) + \hat{\varphi}(\hat{u}); \quad \forall v, \hat{u} \in V.$$

Soient u et $\hat{u}$, les solutions respectives de

$$\begin{aligned} a(u, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) &\geq (f, v - u), \quad \forall v \in V, \\ a(\hat{u}, v - \hat{u}) + \hat{\varphi}(v) - \hat{\varphi}(\hat{u}) &\geq (f, v - \hat{u}), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Alors on a $u \geq \hat{u}$ p. p. sur Ω :

1.2. Problèmes linéaires avec contraintes unilatérales sur le bord

I.2.1. DESCRIPTION DU PROBLÈME. — Soit Φ une fonction convexe s. c. i. sur $L^2(\Gamma)$ à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, $\Phi \not\equiv +\infty$.

On associe à Φ le graphe maximal monotone $\partial\Phi$ dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$. On suppose que la restriction de Φ à $H^{1/2}(\Gamma)$ n'est pas identiquement égale à $+\infty$ et on pose $\tilde{\Phi} = \Phi|_{H^{1/2}(\Gamma)}$. $\partial\tilde{\Phi}$ est un graphe maximal monotone dans $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. On supposera dans la suite que (1.3) est vérifié avec $V = H^1(\Omega)$ i. e. $a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{\text{H}}^2$, $\forall u \in H^1(\Omega)$, $\alpha > 0$.

THÉORÈME I.7⁽⁷⁾. — Pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in H^1(\Omega)$ unique solution de l'inéquation

$$(2.1) \quad a(u, v - u) + \Phi(v|_{\Gamma}) - \Phi(u|_{\Gamma}) \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

De plus u est caractérisé par les conditions

$$(2.2) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{au sens de } \mathcal{O}'(\Omega), \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \partial \tilde{\Phi}(u|_{\Gamma}), \end{cases}$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée conormale de u associée à L , i. e.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(n, x_j),$$

n étant la normale extérieure à Ω .

REMARQUE I.19. — Si $u \in H^1(\Omega)$ et $Lu \in L^2(\Omega)$ alors $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ est défini comme élément de $H^{-1/2}(\Gamma)$ (cf. Lions-Magenes [1], chap. 2). D'autre part $\partial \tilde{\Phi}(u|_{\Gamma})$ est un sous-ensemble de $H^{-1/2}(\Gamma)$ de sorte que (2.2) a bien un sens.

Démonstration. — La fonction $u \in H^1(\Omega) \mapsto \Phi(u|_{\Gamma})$ est convexe s. c. i. sur $H^1(\Omega)$. L'existence et l'unicité de la solution de (2.1) se déduisent de résultats généraux (cf. par exemple, Browder [3]).

Prenant $v = u + \eta$ avec $\eta \in \mathcal{O}(\Omega)$ on obtient directement $Lu = f$ au sens de $\mathcal{O}'(\Omega)$.

D'autre part, on a aussi

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - u \, d\Gamma + \Phi(v|_{\Gamma}) - \Phi(u|_{\Gamma}) \geq 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

et comme l'application $v \mapsto v|_{\Gamma}$ est surjective de $H^1(\Omega)$ sur $H^{1/2}(\Gamma)$, on a

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - u \, d\Gamma + \Phi(v) - \Phi(u|_{\Gamma}) \geq 0, \quad \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

autrement dit :

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \partial \tilde{\Phi}(u|_{\Gamma}).$$

La réciproque est immédiate.

(7) Un résultat semblable a été démontré indépendamment par L. Tartar.

REMARQUE I.20. — Le problème (2.2) peut être ramené à une équation non linéaire sur Γ . En effet, soit v_0 la solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} L v_0 &= f \quad \text{sur } \Omega, \\ v_0 &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

et soit $g = -\frac{\partial v_0}{\partial \nu}$.

Posant $\tilde{u} = u - v_0$, il vient

$$\begin{aligned} L \tilde{u} &= 0, \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} + g &\in \partial \tilde{\Phi}(\tilde{u}|_{\Gamma}). \end{aligned}$$

Considérons enfin l'application $\mathcal{A} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ définie de la manière suivante : étant donné $w \in H^{1/2}(\Gamma)$, soit $v \in H^1(\Omega)$ la solution de l'équation

$$\begin{aligned} L v &= 0 \quad \text{sur } \Omega, \\ v &= w \quad \text{sur } \Gamma, \end{aligned}$$

on pose $\mathcal{A} w = \frac{\partial v}{\partial \nu}$ ($\mathcal{A}$ est un opérateur pseudo-différentiel sur Γ).

On cherche alors $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ tel que $\mathcal{A} w + \partial \tilde{\Phi}(w) \ni g$.

Ce problème peut être traité directement car $\mathcal{A}$ est (linéaire) monotone continu et coercif de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $\partial \tilde{\Phi}$ est maximal monotone.

APPROXIMATION DE u . — Soit $\varepsilon > 0$ et soit

$$(2.3) \quad \Phi_\varepsilon(u) = \inf_{v \in L^2(\Gamma)} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Gamma} |u - v|^2 d\Gamma + \Phi(v).$$

Rappelons (cf. Brézis [4]) que Φ_ε est une fonction convexe continue sur $L^2(\Gamma)$; Φ_ε converge en croissant vers Φ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Φ_ε admet en tout point une différentielle Fréchet Φ'_ε avec

$$\Phi'_\varepsilon = (\partial \Phi)_\varepsilon = \frac{I - J_\varepsilon}{\varepsilon} \quad \text{où } J_\varepsilon = (I + \varepsilon \partial \Phi)^{-1}$$

et $(\partial \Phi)_\varepsilon$ est la régularisée Yosida de $\partial \Phi$. Notons enfin que dans la formule (2.3) la borne inférieure est atteinte en $v = J_\varepsilon u$ et par conséquent :

$$\Phi_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Gamma} |u - J_\varepsilon u|^2 d\Gamma + \Phi(J_\varepsilon u).$$

THÉORÈME I.8. — Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ la solution de l'inéquation

$$(2.4) \quad a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \Phi_\varepsilon(v|_{\Gamma}) - \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon|_{\Gamma}) \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u_\varepsilon dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Alors u_ε converge fortement dans $H^1(\Omega)$ vers la solution de (2.1) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
De plus, on a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \in L^2(\Gamma) \quad \text{et} \quad -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \Phi'_\varepsilon(u_\varepsilon|_\Gamma) \quad \text{p.p. sur } \Gamma.$$

Démonstration. — Soit $v_0 \in H^1(\Omega)$ tel que $\Phi(v_0|_\Gamma) < +\infty$.

Reportant $v = v_0$ dans (2.4), il vient

$$a(u_\varepsilon, v_0 - u_\varepsilon) + \Phi_\varepsilon(v_0|_\Gamma) - \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Gamma |u_\varepsilon - J_\varepsilon u_\varepsilon|^2 d\Gamma - \Phi(J_\varepsilon u_\varepsilon|_\Gamma) \geq \int_\Omega f \cdot v_0 - u_\varepsilon dx.$$

D'autre part, il existe $h \in L^2(\Gamma)$, $r \in \mathbb{R}$ tels que

$$\Phi(v) \geq \int_\Gamma h v d\Gamma + r, \quad \forall v \in L^2(\Gamma)$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \Phi(J_\varepsilon u_\varepsilon|_\Gamma) &\geq \int_\Gamma h J_\varepsilon u_\varepsilon d\Gamma + r \geq \int_\Gamma h (J_\varepsilon u_\varepsilon - u_\varepsilon) d\Gamma + \int_\Gamma h u_\varepsilon d\Gamma + r \\ &\geq -\|h\|_{L^2(\Gamma)} \|u_\varepsilon - J_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} - C \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + r. \end{aligned}$$

On en déduit que $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ demeure borné lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de même que $\frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma |u_\varepsilon - J_\varepsilon u_\varepsilon|^2 d\Gamma$.

Soit alors $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tel que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} u_{\varepsilon_n} &= u^* \quad \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible,} \\ \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} u_{\varepsilon_n} &= u^* \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort,} \\ \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} u_{\varepsilon_n}|_\Gamma &= u^*|_\Gamma \quad \text{dans } H^{1/2}(\Gamma) \text{ faible,} \\ \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} u_{\varepsilon_n}|_\Gamma &= u^*|_\Gamma \quad \text{dans } L^2(\Gamma) \text{ fort.} \end{aligned}$$

On a donc aussi

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} J_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}|_\Gamma = u^*|_\Gamma \quad \text{dans } L^2(\Gamma) \text{ fort.}$$

D'après (2.4), on a

$$a(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \Phi_\varepsilon(v|_\Gamma) - \Phi(J_\varepsilon u_\varepsilon|_\Gamma) \geq \int_\Omega f \cdot v - u_\varepsilon dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

D'où

$$\begin{aligned} a(u^*, u^*) &\leq \limsup_{\varepsilon_n \rightarrow 0} a(u_{\varepsilon_n}, u_{\varepsilon_n}) \leq a(u^*, v) + \Phi(v|_\Gamma) - \Phi(u^*|_\Gamma) - \int_\Omega f \cdot v - u^* dx, \\ &\quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Par conséquent u^* vérifie

$$a(u^*, v - u^*) + \Phi(v|_\Gamma) - \Phi(u^*|_\Gamma) \geq \int_\Omega f \cdot v - u^* dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

D'après l'unicité de la solution de (2.1), on a $u^* = u$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u$ dans $H^1(\Omega)$ faible. Enfin comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = a(u, u)$, on obtient $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u$ dans $H^1(\Omega)$ fort.

Par ailleurs, on a

$$(2.5) \quad \Phi_\varepsilon(v) - \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon|_\Gamma) + \int_\Gamma \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} v - u_\varepsilon d\Gamma \geq 0, \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Prenant $v = u_\varepsilon|_\Gamma + t w$ (dans (2.5) avec $w \in H^{1/2}(\Gamma)$, $t > 0$, on obtient après division par t et passage à la limite quand $t \rightarrow 0$:

$$\int_\Gamma \Phi'_\varepsilon(u_\varepsilon) \cdot w d\Gamma + \int_\Gamma \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} w d\Gamma = 0, \quad \forall w \in H^{1/2}(\Gamma).$$

Comme $\Phi'_\varepsilon(u_\varepsilon) \in L^2(\Gamma)$ on en déduit que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \in L^2(\Gamma) \quad \text{avec} \quad -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \Phi'_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad \text{p. p. sur } \Gamma$$

[d'où aussi $u_\varepsilon \in H^{3/2}(\Omega)$].

PROBLÈME DUAL. — Si la forme $a(u, v)$ est *symétrique* i. e. $a(u, v) = a(v, u)$, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$, alors le problème (2.1) est équivalent au problème de minimisation,

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \frac{1}{2} a(u, u) - \int_\Omega f \cdot u dx + \Phi(u|_\Gamma).$$

Ce dernier problème peut être transformé par dualité (cf. § I.4.3) en utilisant la fonction convexe conjuguée $\tilde{\Phi}^*$ de $\tilde{\Phi}$ définie sur $H^{-1/2}(\Gamma)$ par

$$\tilde{\Phi}^*(u) = \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma)} \int_\Gamma u \cdot v d\Gamma - \tilde{\Phi}(v).$$

PROPOSITION I.10. — Soit $f \in L^2(\Omega)$, alors

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \frac{1}{2} a(u, u) - \int_\Omega f \cdot u dx + \Phi(u|_\Gamma) = \max_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ L v + f = 0}} -\frac{1}{2} a(v, v) - \tilde{\Phi}^*\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right).$$

De plus si le minimum (resp. maximum) est atteint en u^* (resp. v^*), on a $u^* + v^* = 0$.

[Noter que si $v \in H^1(\Omega)$ et si $L v = -f$, alors $\frac{\partial v}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ et donc $\tilde{\Phi}^*\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)$ a bien un sens.]

Démonstration. — On applique les résultats généraux rappelés au paragraphe 1.1.3 dans l'espace de Hilbert $V = H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $a(u, v)$.

Soit

$$\varphi(u) = - \int_{\Omega} f \cdot u \, dx + \Phi(u|_{\Gamma}).$$

On a alors

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \frac{1}{2} a(u, u) + \varphi(u) = \max_{v \in H^1(\Omega)} - \frac{1}{2} a(v, v) - \varphi^*(v),$$

avec $u^* + v^* = 0$ et

$$\varphi^*(v) = \sup_{u \in H^1(\Omega)} a(u, v) - \varphi(u) = \begin{cases} \tilde{\Phi}^*\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) & \text{si } L v + f = 0, \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

UN EXEMPLE FONDAMENTAL. — Soit β un graphe maximal monotone dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Il existe une fonction convexe s. c. i. de $\mathbf{R}$ dans $] -\infty, +\infty]$, $j \not\equiv +\infty$, telle que $\beta = \partial j$ (j est une « intégrale » indéfinie de β).

On associe à j une fonction convexe Φ définie sur $L^2(\Gamma)$ par

$$\Phi(u) = \begin{cases} \int_{\Gamma} j(u) \, d\Gamma & \text{si } j(u) \in L^1(\Gamma), \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On sait (cf. appendice I) que Φ est convexe s. c. i. sur $L^2(\Gamma)$ et que, étant donnés $f, u \in L^2(\Gamma)$ alors $f \in \partial \Phi(u)$ si et seulement si $f(x) \in \beta(u(x))$ p. p. sur Γ .

On notera aussi que, pour tout $u \in L^2(\Gamma)$:

$$\Phi_{\varepsilon}(u) = \int_{\Gamma} j_{\varepsilon}(u) \, d\Gamma \quad \text{et} \quad \Phi'_{\varepsilon}(u) = \beta_{\varepsilon}(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

Les problèmes (2.1) relatifs à certains choix de β ont été abordés précédemment. Indiquons quelques exemples :

Exemple 1 :

$$\beta(r) = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{si } r = 0, \\ \emptyset & \text{si } r \neq 0. \end{cases}$$

Le problème (2.1) correspondant est le problème de Dirichlet. Dans ce cas on a

$$j(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0, \\ +\infty & \text{si } r \neq 0; \end{cases}$$

$$\beta_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon} r \quad \text{et} \quad j_\varepsilon(r) = \frac{1}{2\varepsilon} r^2.$$

Exemple 2 :

$$\beta(r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Le problème (2.1) correspondant est le problème de Neumann. Dans ce cas, on a

$$j(r) = \beta_\varepsilon(r) = j_\varepsilon(r) = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3 :

$$\beta(r) = kr, \quad k > 0.$$

Le problème (2.1) correspondant est le « troisième problème aux limites ». Dans ce cas on a

$$j(r) = \frac{kr^2}{2}, \quad \beta_\varepsilon(r) = \frac{kr}{1 + \varepsilon k}, \quad j_\varepsilon(r) = \frac{kr^2}{2(1 + \varepsilon k)}.$$

Exemple 4 :

$$\beta(r) = \begin{cases} 0 & (r > 0), \\]-\infty, 0] & (r = 0), \\ \emptyset & (r < 0). \end{cases}$$

On obtient les conditions aux limites ambiguës de Signorini qui interviennent en élasticité (*cf.* Fichera [1]).

Dans ce cas :

$$j(r) = \begin{cases} 0 & (r \geq 0), \\ +\infty & (r < 0), \end{cases}$$

$$\beta_\varepsilon(r) = \begin{cases} 0 & (r \geq 0), \\ \frac{r}{\varepsilon} & (r < 0); \end{cases}$$

$$j_\varepsilon(r) = \begin{cases} 0 & (r \geq 0), \\ \frac{r^2}{2\varepsilon} & (r < 0). \end{cases}$$

Exemple 5 :

$$\beta(r) = \begin{cases} 1 & (r > 0), \\ [-1, +1] & (r = 0), \\ -1 & (r < 0). \end{cases}$$

On obtient une condition aux limites intervenant en élasticité avec frottements (*cf.* Lions [4] et Duvaut-Lions [1]).

Dans ce cas :

$$j(r) = |r|,$$

$$\beta_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & (r > \varepsilon), \\ \frac{r}{\varepsilon} & (|r| \leq \varepsilon), \\ -1 & (r < -\varepsilon); \end{cases}$$

$$j_\varepsilon(r) = \begin{cases} |r| - \frac{\varepsilon}{2} & (|r| > \varepsilon), \\ \frac{r^2}{2\varepsilon} & (|r| \leq \varepsilon). \end{cases}$$

Exemple 6. — Soit $k > 0$ et

$$\beta(r) = \begin{cases} 1 & \left(r \geq \frac{1}{k}\right), \\ kr & \left(|r| < \frac{1}{k}\right), \\ -1 & \left(r \leq -\frac{1}{k}\right). \end{cases}$$

Les conditions aux limites correspondantes interviennent dans un problème de climatisation (*cf.* Ducaut-Lions [3]).

Dans ce cas :

$$j(r) = \begin{cases} |r| - \frac{1}{2k} & \left(|r| \geq \frac{1}{k}\right), \\ \frac{kr^2}{2} & \left(|r| < \frac{1}{k}\right); \end{cases}$$

$$j_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 & \left(r \geq \varepsilon + \frac{1}{k}\right), \\ \frac{kr}{1 + \varepsilon k} & |r| < \varepsilon + \left(\frac{1}{k}\right), \\ -1 & \left(r \leq -\left(\varepsilon + \frac{1}{k}\right)\right); \end{cases}$$

$$j_\varepsilon(r) = \begin{cases} |r| - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2k} & \left(|r| \geq \varepsilon + \frac{1}{k}\right), \\ \frac{kr^2}{2(1 + \varepsilon k)} & \left(|r| \leq \varepsilon + \frac{1}{k}\right). \end{cases}$$

REMARQUE 1.21. — Plus généralement, on pourrait considérer une fonction $j(x, r) : \Gamma \times \mathbf{R} \rightarrow]-\infty, +\infty]$ convexe s. e. i. en r et montrer

que, sous des hypothèses convenables, la fonction

$$\Phi(u) = \begin{cases} \int_{\Gamma} j(x, u) dx & \text{si } j(x, u) \in L^1(\Gamma), \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est convexe et s. c. i.

Autre choix possible :

$$\Phi(u) = \begin{cases} \|u\|_{H^1(\Gamma)}^2 & \text{si } u \in H^1(\Gamma), \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

I.2.2. RÉGULARITÉ. — Nous nous limiterons à l'étude de la régularité de la solution u de (2.1) sur l'exemple fondamental considéré au paragraphe I.2.1, i. e.

$$\Phi(u) = \begin{cases} \int_{\Gamma} j(u) d\Gamma & \text{si } j(u) \in L^1(\Gamma), \\ +\infty & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

avec $\beta = \partial j$. La technique consiste à établir des estimations indépendantes de ε pour la solution u_ε du problème « régularisé » et de passer ensuite à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme u_ε est la solution du problème

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon &= f && \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega), \\ -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} &= \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) && \text{p. p. sur } \Gamma. \end{aligned}$$

il est bon de commencer par étudier le cas où β est lipschitzien.

THÉORÈME I.9. — Soit $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < +\infty$ et soit β une fonction lipschitzienne de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (non nécessairement monotone) telle que $\beta(0) = 0$.

Soit $u \in H^1(\Omega)$ une fonction vérifiant

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega), \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} &= \beta(u) && \text{p. p. sur } \Gamma, \end{aligned}$$

alors $u \in W^{2,p}(\Omega)$, avec

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C(\|f\|_{L^p} + \|u\|_{H^1}) \quad (*)$$

On utilisera dans la démonstration le

(*) On désigne par C diverses constantes dépendant uniquement de Ω , p , N , β et des coefficients de L .

LEMME I.4. — Soit $0 \leq s \leq 1$ et soit $u \in W^{s,p}(\Gamma)$ alors $\beta(u) \in W^{s,p}(\Gamma)$, avec

$$\|\beta(u)\|_{W^{s,p}} \leq C \|u\|_{W^{s,p}}.$$

Démonstration du lemme I.4. — Le résultat est immédiat pour $s = 0$; plus précisément on a

$$\|\beta(u_1) - \beta(u_2)\|_{L^p} \leq C \|u_1 - u_2\|_{L^p}, \quad \forall u_1, u_2 \in L^p(\Gamma).$$

D'autre part, si $s = 1$, on sait (cf. par exemple Stampacchia [4]) que

$$\|\beta(u)\|_{W^{1,p}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Gamma).$$

Nous pouvons alors appliquer un théorème d'interpolation (non linéaire) de Lions [3]; β envoie donc $[W^{1,p}, L^p]_{1-s,p} = W^{s,p}$ dans lui-même, avec $0 < s < 1$ et

$$\|\beta(u)\|_{W^{s,p}} \leq C \|u\|_{W^{s,p}}.$$

[On aurait aussi pu utiliser la caractérisation de Gagliardo des espaces $W^{s,p}$ qui fait intervenir

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \Big].$$

Démonstration du théorème I.9. — Utilisant la remarque I.20, on introduit $\tilde{u} = u - v_0$ qui vérifie

$$\begin{aligned} L\tilde{u} &= 0 \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} + \beta(\tilde{u}) &= g \quad \text{p. p. sur } \Gamma, \end{aligned}$$

où

$$g = -\frac{\partial v_0}{\partial \nu} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \quad \text{et} \quad \|g\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\Gamma)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

On pose $s = 1 - \frac{1}{p}$ et on va montrer que si $2 \leq q \leq p$ et si $\tilde{u}|_{\Gamma} \in W^{s,q}(\Gamma)$ alors $\tilde{u}|_{\Gamma} \in W^{s,q^*}(\Gamma)$ avec

$$\|\tilde{u}|_{\Gamma}\|_{W^{s,q^*}(\Gamma)} \leq C \|\tilde{u}|_{\Gamma}\|_{W^{s,q}(\Gamma)},$$

où

$$\frac{1}{q^*} = \begin{cases} \frac{1}{q} - \frac{1}{N-1} & \text{si } q < N-1, \\ \text{arbitraire} & \text{si } q \geq N-1. \end{cases}$$

En effet, d'après le lemme I.1 on a $\beta(\tilde{u}) \in W^{s,q}(\Gamma)$ et donc $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \in W^{s,q}(\Gamma)$ avec

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \right\|_{W^{s,q}(\Gamma)} &\leq C (\|g\|_{W^{s,q}(\Gamma)} + \|\tilde{u}|_{\Gamma}\|_{W^{s,q}(\Gamma)}) \\ &\leq C (\|f\|_{L^p(\Gamma)} + \|\tilde{u}|_{\Gamma}\|_{W^{s,q}(\Gamma)}). \end{aligned}$$

Par suite $\tilde{u} \in W^{s+1+\frac{1}{q},q}(\Omega)$ et donc $\tilde{u}|_{\Gamma} \in W^{s+1,q}(\Gamma)$, avec

$$\|\tilde{u}|_{\Gamma}\|_{W^{s+1,q}(\Gamma)} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\tilde{u}|_{\Gamma}\|_{W^{s,q}(\Gamma)}).$$

Enfin, par Sobolev, il vient

$$\|\tilde{u}|_{\Gamma}\|_{W^{s,q^*}(\Gamma)} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|\tilde{u}|_{\Gamma}\|_{W^{s,q}(\Gamma)}).$$

Comme $\tilde{u} = u$ sur Γ , on a

$$\|u|_{\Gamma}\|_{W^{s,q^*}(\Gamma)} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u|_{\Gamma}\|_{W^{s,q}(\Gamma)}).$$

Par ailleurs, $u \in H^1(\Omega)$ et donc $\beta(u|_{\Gamma}) \in H^{1/2}(\Gamma)$, d'où $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{1/2}(\Gamma)$; par suite $u \in H^2(\Omega)$ et $u|_{\Gamma} \in H^{3/2}(\Gamma)$, avec

$$\|u|_{\Gamma}\|_{H^{3/2}(\Gamma)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

Le résultat précédent réitéré permet alors, partant de $q = 2$ de « remonter » jusqu'à $q = p$, i. e. $u|_{\Gamma} \in W^{s,p}(\Gamma)$ avec

$$\|u|_{\Gamma}\|_{W^{s,p}(\Gamma)} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}).$$

On en conclut que $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in W^{s,p}(\Gamma)$ et par suite $u \in W^{s+1+\frac{1}{p},p}(\Omega) = W^{2,p}(\Omega)$ avec l'estimation désirée.

REMARQUE I.22. — En général l'équation

$$\begin{aligned} Lu &= f, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \beta(u) \end{aligned}$$

n'admet pas de solution, si l'on suppose seulement β lipschitzien. Par contre, il est immédiat que l'équation

$$\begin{aligned} Lu + \lambda u &= f, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= \beta(u) \end{aligned}$$

admet une solution unique si λ est suffisamment grand et on a une estimation

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

REMARQUE I.23. — Poursuivant le même argument, on peut obtenir d'autres résultats de régularité; par exemple si $f \in H^{1/2}(\Omega)$, alors $u \in H^{5/2}(\Omega)$.

REMARQUE I.24. — Une technique semblable permet de montrer que u est « très » régulière [en particulier $C^\infty(\bar{\Omega})$] si f et β le sont.

On revient maintenant au cas où β est un graphe maximal monotone et sans restreindre la généralité on peut supposer que $0 \in \beta(0)$.

THÉORÈME I.10. — Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in H^1(\Omega)$ la solution de (2.1). Alors $u \in H^2(\Omega)$ avec

$$(2.6) \quad \|u\|_H \leq C \|f\|_{L^2} \quad (^9).$$

De plus :

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma \quad \left[\text{noter que } \frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{1/2}(\Gamma) \right].$$

Démonstration. — La régularité à l'intérieur étant bien connue, il suffit de montrer la régularité au voisinage du bord. Ceci sera fait *localement* en établissant les estimations sur u_ε indépendantes de ε . Soit donc $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$ (d'après le théorème I.9) la solution de

$$L u_\varepsilon = f \quad \text{p. p. sur } \Omega,$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

Soit $x_0 \in \Gamma$ et soit U un voisinage de x_0 ; on introduit localement de nouvelles coordonnées $\tilde{x} = T x$ avec $T x_0 = 0$ de sorte que $T(U \cap \Omega)$ soit le cylindre

$$\tilde{\Omega}_R = \{ \tilde{x} = (\tilde{x}', \tilde{x}_N), \quad |\tilde{x}'| < R, \quad 0 < \tilde{x}_N < R \},$$

où

$$\tilde{x}' = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{N-1}) \quad \text{et} \quad T(U \cap \Gamma) = \tilde{\Gamma}_R = \{ \tilde{x} = (\tilde{x}', \tilde{x}_N); \quad |\tilde{x}'| < R, \quad \tilde{x}_N = 0 \}.$$

On suppose que T_N est normalisé de manière à avoir $|\text{grad } T_N| = 1$ sur $U \cap \Gamma$ et par suite :

$$\frac{\partial T_N}{\partial x_i} = -\cos(n, x_i) \quad \text{sur } \Gamma \quad (n \text{ est la normale extérieure à } \Omega).$$

(⁹) Les diverses constantes C qui apparaissent dans la suite dépendent uniquement de Ω , N et des coefficients de L .

Introduisant $\tilde{u}_\varepsilon(\tilde{x}) = u_\varepsilon(x)$ et $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x)$, on a

$$(2.7) \quad \tilde{L} \tilde{u}_\varepsilon = \tilde{f} \quad \text{dans } \tilde{\Omega}_R,$$

$$(2.8) \quad -\frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \tilde{\nu}} = \beta_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \quad \text{sur } \tilde{\Gamma}_R,$$

où

$$\tilde{L} = - \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_l} \left(\tilde{a}_{kl}(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} \right) + \sum_{k=1}^N \tilde{b}_k \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_k} + \tilde{c},$$

avec

$$\tilde{a}_{kl}(\tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \Gamma_l}{\partial x_j}(x)$$

[noter que $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \sum_k \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \tilde{x}_k}(\tilde{x})$] et où $\frac{\partial}{\partial \tilde{\nu}}$ est la dérivée conormale associée à $\tilde{L}$.

La vérification de (2.7) est immédiate. Prouvons (2.8); on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(x) &= \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} \cos(n, x_j) \\ &= \sum_{i,j,k} a_{ij}(x) \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \tilde{x}_k}(\tilde{x}) \cos(n, x_j). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \tilde{\nu}}(\tilde{x}) = - \sum_k \tilde{a}_{kN}(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \tilde{x}_k}(\tilde{x}),$$

or

$$\tilde{a}_{kN}(\tilde{x}) = - \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_i}(x) \cos(n, x_j)$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \tilde{\nu}}(\tilde{x}) &= \sum_{i,j,k} a_{ij}(x) \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial \tilde{x}_k}(\tilde{x}) \cos(n, x_j) \\ &= \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(x) = - \beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) = - \beta_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon(\tilde{x})). \end{aligned}$$

Afin d'alléger les notations, nous utiliserons le

LEMME I.2. — Soit $L = - \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(a_{kl} \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$ un opérateur elliptique sur Ω_R et soit $u \in H^2(\Omega_R)$ vérifiant

$$(2.9) \quad L u = f \quad \text{sur } \Omega_R,$$

$$(2.10) \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} = \beta(u) \quad \text{sur } \Gamma_R,$$

où β est une fonction lipschitzienne croissante.

Alors

$$\|u\|_{H^2(\Omega_{R/2})} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega_R)} + \|u\|_{H^1(\Omega_R)}),$$

où C est une constante dépendant uniquement de R et des coefficients a_{kl} (en particulier C est indépendante de β).

Démonstration du lemme I.2. — Soit $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\eta = 1$ sur un voisinage de $\Omega_{R/2}$ et $\eta = 0$ pour $|x'| \geq R$, ou bien $x_N \geq R$.

Multipliant l'équation (2.9) par $-\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$, il vient après des intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\Gamma_R} \beta'(\eta) \eta^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 d\Gamma + \int_{\Omega_R} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\eta^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \\ = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{\Omega_R} f \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx. \end{aligned}$$

Après regroupement des termes, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^N \left\| \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L^2(\Omega_R)}^2 \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega_R)} + \|u\|_{H^1(\Omega_R)}) \\ \times \left(\|u\|_{H^1(\Omega_R)} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^N \left\| \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L^2(\Omega_R)} \right). \end{aligned}$$

D'où l'on déduit :

$$\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^N \left\| \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L^2(\Omega_R)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega_R)} + \|u\|_{H^1(\Omega_R)}).$$

Enfin la conclusion du lemme I.2, s'obtient en remarquant que grâce à l'équation (2.9), on a

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \right\|_{L^2(\Omega_{R/2})} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega_{R/2})} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=1}^N \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L^2(\Omega_{R/2})} \right).$$

Fin de la démonstration du théorème I.10. — Grâce au lemme I.2, on a

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^2(\tilde{\Omega}_{R/2})} \leq C (\|\tilde{f}\|_{L^2(\tilde{\Omega}_R)} + \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\tilde{\Omega}_R)}).$$

Revenant à u_ε , on en déduit par recollement que

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}).$$

Comme d'autre part :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

l'inégalité (2.6) est démontrée.

Enfin on a

$$-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

On sait que $u_{\varepsilon|_\Gamma} \rightarrow u|_\Gamma$ dans $L^2(\Gamma)$ et (d'après ce qui précède), $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}$ dans $L^2(\Gamma)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

De plus :

$$-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = \frac{u_\varepsilon - J_\varepsilon^\beta u_\varepsilon}{\varepsilon} \in \beta(J_\varepsilon^\beta u_\varepsilon) \quad \text{p. p. sur } \Gamma \quad \text{où } J_\varepsilon^\beta = (I + \varepsilon \beta)^{-1}.$$

Donc $J_\varepsilon^\beta u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^2(\Gamma)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Enfin comme le graphe de β est fermé, on en conclut que $-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u)$ p. p. sur Γ .

REMARQUE I.25. — L'argument utilisé au lemme I.2, est une adaptation de la méthode des translations due à Nirenberg [1]. Cette technique avait été employée par Lions [5] dans le cas particulier correspondant au β de l'exemple 4 (le fait que, en général, β ne soit pas positivement homogène introduit une difficulté supplémentaire). On peut aussi démontrer une version locale du théorème I.10. Soit $x_0 \in \Gamma$ et soit U un voisinage de x_0 ; on dit que $u \in H^1(\Omega \cap U)$ est une solution *locale* de (2.1) si

$$(2.11) \quad \begin{cases} a(u, \eta(v-u)) + \int_{\Gamma \cap U} \eta j(v) d\Gamma - \int_{\Gamma \cap U} \eta j(u) d\Gamma \geq \int_{\Omega \cap U} f \cdot \eta(v-u) dx, \\ \forall v \in H^1(\Omega \cap U), \quad \forall \eta \in \mathcal{O}(U); \quad \eta \geq 0 \quad \text{sur } U. \end{cases}$$

[On notera que toute solution globale est locale : il suffit de commencer par établir (2.11) dans le cas où $0 \leq \eta \leq 1$ en prenant $v = (1 - \eta)u + \eta w$, $w \in H^1(\Omega)$ dans (2.1).] Si $f \in L^2(\Omega \cap U)$ et si $u \in H^1(\Omega \cap U)$ est une solution locale, alors $u \in H^2(\Omega \cap U')$ pour tout ouvert U' tel que $\bar{U}' \subset U$ et on a une estimation

$$\|u\|_{H^2(\Omega \cap U')} \leq C (\|f\|_{L^2(\Omega \cap U)} + \|u\|_{H^1(\Omega \cap U)}).$$

De plus on a

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma \cap U.$$

Principe de la démonstration. — Par cartes locales, on se ramène au cas où

$$\begin{aligned} U &= \{ x = (x', x_N); |x'| < R, \quad |x_N| < R \}, \\ \Omega \cap U &= \{ x = (x', x_N); |x'| < R, \quad 0 < x_N < R \}, \\ \Gamma \cap U &= \{ x = (x', x_N); |x'| < R, \quad x_N = 0 \}, \\ U' &= \{ x = (x', x_N); |x'| < R', \quad |x_N| < R' \}, \end{aligned}$$

avec $R' < R$.

Soit $\eta_0 \in \mathcal{O}(U)$, $\eta_0 = 1$ sur U' et soit $h > 0$ destiné à tendre vers zéro. On prend d'abord dans (2.11) :

$$v(x) = u(x + he_i) \quad (1 \leq i \leq N-1), \quad \eta_i(x) = \eta_0^2(x),$$

puis

$$v(x) = u(x - he_i) \quad (1 \leq i \leq N-1), \quad \eta_i(x) = \eta_0^2(x - he_i).$$

Après addition, on obtient

$$\begin{aligned} & a(u(x), \eta_0^2(x)(u(x + he_i) - u(x))) + a(u(x), \eta_0^2(x - he_i)(u(x - he_i) - u(x))) \\ & \geq \int_{\Omega \cap U} (f(x) - f(x + he_i)) \eta_0^2(x)(u(x + he_i) - u(x)) dx. \end{aligned}$$

On achève la démonstration comme dans le théorème I.10, certaines dérivées étant toutefois remplacées par des différences finies. Enfin on déduit de (2.11) que $Lu = f$ et que

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \cap U} \frac{\partial u}{\partial \nu} \eta(v - u) d\Gamma + \int_{\Gamma \cap U} \eta[j(v) - j(u)] d\Gamma \geq 0, \\ & \forall v \in H^{1/2}(\Gamma \cap U), \quad \forall \eta \in \mathcal{O}(U); \quad \eta \geq 0 \quad \text{sur } U. \end{aligned}$$

D'où il résulte que $\forall v \in H^{1/2}(\Gamma \cap U)$,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} v - u + j(v) - j(u) \geq 0 \quad \text{p. p. sur } \Gamma \cap U$$

et par suite :

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma \cap U.$$

REMARQUE I.26. — Nous devons à E. Shamir l'exemple suivant qui montre que le résultat de régularité obtenu au théorème I.10 est le meilleur possible (même lorsque f est régulière et même si β est continu) ⁽¹⁰⁾.

⁽¹⁰⁾ Très récemment nous avons établi des résultats de régularité dans les espaces de Sobolev *fractionnaires*; en particulier si f est assez régulière, alors $u \in W^{s,p}(\Omega)$ pour tout $2 \leq p \leq +\infty$, $s \leq 1 + \frac{2}{p}$ et pour tout $1 < p < 2$, $s < 1 + \frac{2}{p}$. (C. R. Acad. Sc. Paris. **273**, (1971) p. 35-37).

Soit $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0 \}$ et soit $u(x, y) = \operatorname{Re} z^\gamma$ avec $z = x + iy$ et $1 < \gamma < \frac{3}{2}$ i. e. $u(x, y) = \rho^\gamma \cos \gamma\theta$ avec $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$.

On a $u \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ p. p. sur Ω , et

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta.$$

Par suite :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \gamma \rho^{\gamma-1} \sin(\gamma - 1)\theta.$$

Pour $x > 0$ et $y = 0$, on a $\theta = 0$, d'où

$$u(x, 0) = \rho^\gamma \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, 0) = 0.$$

Pour $x < 0$ et $y = 0$, on a $\theta = \pi$, d'où

$$u(x, 0) = \rho^\gamma \cos \gamma\pi = -\rho^\gamma |\cos \gamma\pi|$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x, 0) = \gamma \rho^{\gamma-1} \sin(\gamma - 1)\pi = \gamma \rho^{\gamma-1} |\sin \gamma\pi|.$$

Donc u et $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ sont liés sur $\bar{\Gamma}$ par la relation $-\frac{\partial u}{\partial \nu} = \beta(u)$ où

$$\beta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0, \\ -\frac{\gamma |\sin \gamma\pi| \cdot |r|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{|\cos \gamma\pi|^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} & \text{si } r < 0, \end{cases}$$

β est une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$. Il est aisé de voir que u est une solution locale au sens de (2.11), mais u n'appartient pas à $W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$ dès que $p > \frac{2}{2-\gamma}$.

Comme $1 < \gamma < \frac{3}{2}$, p peut être choisi arbitrairement voisin de 2. Lorsque $\gamma = \frac{3}{2}$, la fonction $u = \operatorname{Re} z^{3/2}$ (déjà mentionnée dans Brézis-Stampacchia [1]) vérifie la condition aux limites $-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u)$ où β est défini à l'exemple 4 du paragraphe I.2.1. Lorsque $\gamma = \frac{1}{2}$, la fonction $u = \operatorname{Re} z^{1/2}$ sert d'exemple dans l'étude faite par E. Shamir [1] des problèmes mêlés.

REMARQUE I.27. — Le théorème I.10 montre que l'opérateur $A u = L u$ de domaine

$$D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega); -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \text{ p. p. sur } \Gamma \right\}$$

est maximal monotone dans $L^2(\Omega)$.

THÉORÈME I.11. — Soit $f \in L^p(\Omega)$, $2 \leq p < N$ et soit $u \in H^2(\Omega)$ la solution de l'équation

$$\begin{aligned} L u &= f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} &\in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \bar{\Gamma}. \end{aligned}$$

Alors $u \in W^{1,p^*}(\Omega)$ avec

$$(2.12) \quad \|u\|_{W^{1,p^*}} \leq C \|f\|_{L^p} \quad (11),$$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

En particulier $u \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ avec $\alpha = 2 - \frac{N}{p}$ si $\frac{N}{2} < p < N$.

Démonstration du théorème I.11. — On supposera dans la suite que $N > 2$ (si $N \leq 2$ le théorème I.11 résulte du théorème I.10 grâce à Sobolev). On sait que $u \in W^{2,p}(\Omega')$ [et par suite $u \in W^{1,p^*}(\Omega')$] pour tout Ω' tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Il suffit donc d'établir (2.12) au voisinage de Γ . On se ramène par cartes locales, comme dans la démonstration du théorème I.10 aux équations

$$\begin{aligned} \tilde{L} \tilde{u} &= \tilde{f} \quad \text{p. p. sur } \tilde{\Omega}_R, \\ -\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\nu}} &\in \beta(\tilde{u}) \quad \text{p. p. sur } \tilde{\Gamma}_R. \end{aligned}$$

Pour simplifier l'exposé, nous utiliserons deux lemmes. Auparavant, introduisons les notations suivantes :

$$q = \frac{p(N-2)}{N-p},$$

de sorte que

$$\frac{q-2^*}{2} = \frac{qN}{N-2} = \frac{pN}{N-p} = p^* = \frac{p(q-2)}{p-2},$$

(11) C dépend uniquement de Ω , N , p et L .

où

$$\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N} \quad \text{et} \quad p \leq q \leq p^*;$$

$$\Omega_R = \{ x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N; |x'| < R, 0 < x_N < R \},$$

$$\Gamma_R = \{ x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N; |x'| < R, x_N = 0 \},$$

$$\nabla u(x) = \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \quad \nabla^* u(x) = \frac{u(x - he_i) - u(x)}{h} \quad (1 \leq i \leq N-1),$$

$h > 0$ est destiné à tendre vers zéro.

LEMME I.3. — Soit $L = - \sum_{k,l=1}^N \frac{\partial}{\partial x_l} \left(a_{kl} \frac{\partial}{\partial x_k} \right)$ un opérateur elliptique à coefficients réguliers sur Ω_R et soit $u \in H^2(\Omega_R)$ vérifiant

$$(2.13) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{p. p. sur } \Omega_R, \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) & \text{p. p. sur } \Gamma_R. \end{cases}$$

Alors si $f \in L^p(\Omega_R)$ et si $u \in W^{1,p}(\Omega_R)$, on a pour tout $R' < R$, l'estimation

$$\|\nabla u\|_{L^{p^*}(\Omega_{R'})} \leq C (\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)} + \|f\|_{L^p(\Omega_R)})$$

pour tout $h > 0$ suffisamment petit, où C dépend uniquement de R, R', p, N et L (en particulier C est indépendant de h).

Démonstration. — Soit $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \eta \leq 1$, η à support compact dans l'ouvert $|x'| < R, |x_N| < R$. On multiplie l'équation (2.13) par $\nabla^* [\eta^q (F_q)_\lambda (\nabla u)]$, où $(F_q)_\lambda$ désigne la régularisée Yosida de F_q . Intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_R} -\nabla \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \eta^q (F_q)_\lambda (\nabla u) d\Gamma + \sum_{k,l} \int_{\Omega_R} \nabla \left[a_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right] \frac{\partial}{\partial x_l} [\eta^q (F_q)_\lambda (\nabla u)] dx \\ &= \int_{\Omega_R} f \cdot \nabla^* [\eta^q (F_q)_\lambda (\nabla u)] dx. \end{aligned}$$

Comme $-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u)$ p. p. sur Γ , on a grâce à la monotonie de β et de $(F_q)_\lambda$,

$$-\nabla \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \eta^q (F_q)_\lambda (\nabla u) \geq 0 \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

D'où il résulte que

$$(2.14) \quad \begin{aligned} & \sum_{k,l} \int_{\Omega_R} \nabla \left(a_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l} [\eta^q (F_q)_\lambda (\nabla u)] dx \\ & \leq \int_{\Omega_R} f \cdot \nabla^* [\eta^q (F_q)_\lambda (\nabla u)] dx. \end{aligned}$$

Quand $\lambda \rightarrow 0$, $J_\lambda(\nabla u) \rightarrow \nabla u$ dans $W^{1,p}(\Omega_R)$ (cf. appendice III) ⁽¹²⁾ et donc (cf. appendice II), $(F_q)_\lambda(\nabla u) = F_q(J_\lambda(\nabla u)) \rightarrow F_q(\nabla u)$ dans $W^{1,0}(\Omega_R)$, avec

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{p} + \frac{q-2}{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{p-2}{p} = \frac{1}{p'}.$$

Le passage à la limite dans (2.14) quand $\lambda \rightarrow 0$ est immédiat et on a

$$\sum_{k,l} \int_{\Omega_R} \nabla \left(a_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l} [\eta^q F_q(\nabla u)] dx \leq \int_{\Omega_R} f \cdot \nabla^* [\eta^q F_q(\nabla u)] dx.$$

On en déduit après regroupement de certains termes l'estimation suivante :

$$(2.15) \quad \sum_k \int_{\Omega_R} \eta^q |\nabla u|^{q-2} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right|^2 dx \\ \leq C \left[\sum_k \int_{\Omega_R} \eta^{q-1} |\nabla u|^{q-1} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right| dx + \sum_{k,l} \int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x_l} (\eta^q F_q(\nabla u)) \right| dx \right. \\ \left. + \int_{\Omega_R} |f| \cdot |\nabla^* (\eta^q F_q(\nabla u))| dx \right].$$

Appliquant Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_{\Omega_R} \eta^{q-1} |\nabla u|^{q-1} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right| dx \leq \left[\int_{\Omega_R} \eta^{q-2} |\nabla u|^q dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega_R} \eta^q |\nabla u|^{q-2} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right|^2 dx \right]^{1/2}.$$

D'autre part :

$$\int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right| \cdot \left| \frac{\partial}{\partial x_l} (\eta^q F_q(\nabla u)) \right| dx \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)} \|\eta^q F_q(\nabla u)\|_{W^{1,p'}(\Omega_R)}$$

et de même :

$$\int_{\Omega_R} |f| \cdot |\nabla^* (\eta^q F_q(\nabla u))| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega_R)} \|\eta^q F_q(\nabla u)\|_{W^{1,p'}(\Omega_R)}.$$

Or

$$\|\eta^q F_q(\nabla u)\|_{W^{1,p'}(\Omega_R)} \\ \leq C \left(\|\eta \nabla u\|_{L^{(q-1)p'}(\Omega_R)} + \sum_k \left[\int_{\Omega_R} \eta^{qp'} |\nabla u|^{(q-2)p'} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \right) \\ \leq C \left(\|\eta \nabla u\|_{L^{p^*}(\Omega_R)}^{q-1} + \|\eta \nabla u\|_{L^{p^*}(\Omega_R)}^{\frac{q-2}{2}} \left[\sum_k \int_{\Omega_R} \eta^q |\nabla u|^{q-2} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right|^2 dx \right]^{1/2} \right).$$

⁽¹²⁾ $J_\lambda = (I + \lambda F_q)^{-1}$.

[On utilisera le fait que $(q-1)p' \leq p^*$ et puis l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{2}{p'}$ et $\frac{2(p-1)}{p-2}$ en notant que $\frac{p(q-2)}{p-2} = p^*$.]

On déduit donc de (2.15) que

$$\begin{aligned} & \sum_k \int_{\Omega_R} \eta^q |\nabla u|^{q-2} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right|^2 dx \\ & \leq C \left[(\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)}^2 + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}^2) \|\eta \nabla u\|_{L^{p^*}(\Omega_R)}^{q-2} \right. \\ & \quad \left. + (\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)} + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}) \|\eta \nabla u\|_{L^{p^*}(\Omega_R)}^{q-4} + \int_{\Omega_R} \eta^{q-2} |\nabla u|^q dx \right]. \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité $ab \leq \varepsilon a^\alpha + c_\varepsilon b^\beta \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 \right)$ avec $\alpha = \frac{q}{q-1}$ puis $\alpha = \frac{q}{q-2}$, on obtient

$$\begin{aligned} (2.16) \quad & \sum_k \int_{\Omega_R} \eta^{q-1} |\nabla u|^{q-2} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right|^2 dx \\ & \leq \varepsilon \|\eta \nabla u\|_{L^{p^*}(\Omega_R)}^q + C_\varepsilon \left[\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)}^q + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}^q + \int_{\Omega_R} \eta^{q-2} |\nabla u|^q dx \right]. \end{aligned}$$

(ε arbitrairement petit).

Par ailleurs $H^1(\Omega_R) \subset L^{2^*}(\Omega_R)$ avec injection continue, d'où

$$\left(\int_{\Omega_R} |\Psi|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq C \left[\int_{\Omega_R} \sum_k \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right|^2 dx + \int_{\Omega_R} |\Psi|^2 dx \right], \quad \forall \Psi \in H^1(\Omega_R).$$

Choisissant en particulier :

$$\Psi = \eta^{\frac{q}{2}} |\nabla u|^{\frac{q-2}{2}} \nabla u \quad [\Psi \in H^1(\Omega_R) \text{ d'après l'appendice II}],$$

on en déduit que

$$(2.17) \quad \left(\int_{\Omega_R} |\eta \nabla u|^{\frac{q-2}{2}} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C \left[\int_{\Omega_R} \sum_k \eta^q |\nabla u|^{q-2} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right|^2 dx + \int_{\Omega_R} \eta^{q-2} |\nabla u|^q dx \right].$$

Enfin en combinant (2.16) et (2.17), il vient (noter que $p^* = \frac{q2^*}{2}$) :

$$\left(\int_{\Omega_R} |\eta \nabla u|^{p^*} dx \right)^{\frac{q}{p^*}} \leq \left[C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)}^q + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}^q + \int_{\Omega_R} \eta^{q-2} |\nabla u|^q dx \right]$$

ou encore

$$(2.18) \quad \left(\int_{\Omega_R} |\eta \nabla u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left[\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)} + \|f\|_{L^p(\Omega_R)} + \left(\int_{\Omega_R} \eta^{q-2} |\nabla u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right].$$

On achève la démonstration du lemme I.3 en réitérant l'inégalité (2.18) avec un choix convenable de η .

LEMME I.4. — Soit L comme au lemme I.3 et soit $u \in H^2(\Omega_R)$ vérifiant (2.13). Alors si $f \in L^p(\Omega_R)$, on a pour tout $R' < R$, $u \in W^{1,p^*}(\Omega_{R'})$ avec l'estimation

$$\|u\|_{W^{1,p^*}(\Omega_{R'})} \leq C (\|u\|_{H^1(\Omega_R)} + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}),$$

où C dépend uniquement de R , R' , p , N et L .

Démonstration. — Supposons d'abord que $u \in W^{1,q}(\Omega_R)$; on a alors grâce au lemme I.3 l'estimation

$$\|\nabla u\|_{L^{p^*}(\Omega_{R'})} \leq C (\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)} + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}^q).$$

Reprenant l'inégalité (2.16), on obtient

$$\sum_k \int_{\Omega_{R'}} |\nabla u|^{q-2} \left| \frac{\partial \nabla u}{\partial x_k} \right|^2 dx \leq C (\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)}^q + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}^q).$$

Donc $|\nabla u|^{\frac{q-2}{2}} \nabla u \in H^1(\Omega_{R'})$, avec

$$\begin{aligned} \left\| |\nabla u|^{\frac{q-2}{2}} \nabla u \right\|_{H^1(\Omega_{R'})} &\leq C (\|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)}^q + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}^q + \|\nabla u\|_{L^q(\Omega_{R'})}^q) \\ &\leq C (\|u\|_{W^{1,q}(\Omega_R)}^q + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}^q). \end{aligned}$$

Par conséquent $|\nabla u|^{\frac{q-2}{2}} \nabla u \in H^{1/2}(\Gamma_{R'})$ et comme $H^{1/2}(\Gamma_{R'}) \subset L^t(\Gamma_{R'})$ avec injection continue $\left[\text{où } \frac{1}{t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(N-1)} = \frac{N-2}{2(N-1)} \right]$, on arrive à

$$\left(\int_{\Gamma_{R'}} |\nabla u|^{\frac{q(N-1)}{N-2}} d\Gamma \right)^{\frac{N-2}{q(N-1)}} \leq C (\|u\|_{W^{1,q}(\Omega_R)} + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}).$$

On en déduit que $u \in W^{1, \frac{q(N-1)}{N-2}}(\Gamma_{R'})$ avec

$$\|u\|_{W^{1, \frac{q(N-1)}{N-2}}(\Gamma_{R'})} \leq C (\|u\|_{W^{1,q}(\Omega_R)} + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}).$$

(noter que $\|u\|_{L^{\frac{q(N-1)}{N-2}}(\Gamma_{R'})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega_R)}$).

Enfin $W^{1, \frac{q(N-1)}{N-2}}(\Gamma_{R'}) \subset W^{1, \frac{1}{p^*}, p^*}(\Gamma_{R'})$ avec injection continue car

$$\frac{q(N-1)}{N-2} = \frac{p(N-1)}{N-p} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p^*} = \frac{N-p}{p(N-1)} - \frac{1}{p^*(N-1)}.$$

Donc

$$\|u\|_{W^{1, \frac{1}{p^*}, p^*}(\Gamma_{R'})} \leq C (\|u\|_{W^{1,q}(\Omega_R)} + \|f\|_{L^p(\Omega_R)}).$$

Par ailleurs, u est solution de l'équation $Lu = f$ p. p. sur Ω_R ; il s'ensuit que

$$\|u\|_{W^{1,p^*}(\Omega_{R'})} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega_R)} + \|u\|_{W^{1, \frac{1}{p^*}, p^*}(\Gamma_{R'})},$$

avec $R'' < R'$.

D'où finalement

$$\|u\|_{W^{1,p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega_R)} + \|u\|_{W^{1,q}(\Omega_R)}).$$

Réitérant cette inégalité on arrive au résultat (noter que $p^* = \frac{q2^*}{2}$).

Fin de la démonstration du théorème I.11. — Appliquant le lemme I.4 en supposant $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on obtient par recollement $u \in W^{1,p^*}(\Omega)$ avec l'estimation

$$\|u\|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}).$$

Par réitération on en déduit que

$$\|u\|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C (\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)});$$

ce qui démontre le théorème I.11 puisque

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

REMARQUE I.28. — Par une méthode très différente et supposant seulement les coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ Da Veiga [1] avait montré précédemment pour le β de l'exemple 4 que si $f \in L^p(\Omega)$, $p > \frac{N}{2}$, alors $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ sans préciser α .

REMARQUE I.29. — Le lemme I.4 permet de montrer que si $f \in L^p(\Omega \cap U)$, alors toute solution *locale* au sens de (2.11) appartient à $W^{1,p^*}(\Omega \cap U')$ pour tout U' tel que $\overline{U'} \subset U$.

REMARQUE I.30. — Très récemment nous avons établi que si $f \in L^p(\Omega)$, $p > N$ alors u est lipschitzien sur $\overline{\Omega}$. Il serait intéressant de déterminer

si $u \in C^1(\bar{\Omega})$ [on sait déjà que $u \in C^1(\Omega)$]. Notons enfin, que pour tout $\alpha > 0$ l'exemple de E. Shamir (cf. remarque I.26) fournit β et f (f régulière) tels que la solution correspondante u n'appartienne pas à $C_{loc}^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$.

CONTRAINTES UNILATÉRALES « COMBINÉES » SUR Ω ET Γ . — Soient K un convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et Φ une fonction convexe s. c. i. sur $L^2(\Gamma)$. On suppose que $\Phi(u|_\Gamma)$ n'est pas identiquement $+\infty$ lorsque u décrit $H^1(\Omega) \cap K$. Il est alors immédiat que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe $u \in H^1(\Omega) \cap K$ unique solution de

$$a(u, v - u) + \Phi(v|_\Gamma) - \Phi(u|_\Gamma) \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \cap K.$$

Nous nous bornerons à traiter le problème de la régularité de u sur l'exemple suivant :

$$K = K_1 = \{ u \in L^2(\Omega); u \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \}$$

et

$$\Phi(u) = \begin{cases} \int_{\Gamma} j(u) \, d\Gamma & \text{si } j(u) \in L^1(\Gamma), \\ +\infty & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

avec $\beta = \partial \cdot j$.

Il est commode d'introduire les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \beta^+(r) &= \text{Max} \{ z; z \in \beta(r) \}, & \beta^-(r) &= \text{Min} \{ z; z \in \beta(r) \} & \text{si } r \in D(\beta), \\ \beta^+(r) &= \beta^-(r) = +\infty & \text{si } r \notin D(\beta) & \text{et } r \geq \text{Sup } D(\beta), \\ \beta^+(r) &= \beta^-(r) = -\infty & \text{si } r \notin D(\beta) & \text{et } r \leq \text{Inf } D(\beta). \end{aligned}$$

On a alors le

THÉORÈME I.12. — Soit $f \in L^p(\Omega)$ ($2 \leq p < N$) et soit $\Psi \in W^{2,p}(\Omega)$ vérifiant

$$(2.19) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \beta^-(\Psi) \leq 0 \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

Alors il existe $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,p^*}(\Omega) \cap K_1$ unique solution du problème

$$(2.20) \quad \int_{\Omega} L u \cdot v - u \, dx \geq \int_{\Omega} f \cdot v - u \, dx, \quad \forall v \in K_1,$$

$$(2.21) \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

De plus on a l'estimation

$$\|u\|_{H^2 \cap W^{1,p^*}} \leq C (\|f\|_{L^p} + \|L \Psi\|_{L^p}).$$

Démonstration du théorème I.12. — Soit $\varepsilon > 0$. On vérifie sans difficultés, à l'aide des théorèmes I.10 et I.11 que l'équation

$$(2.22) \quad L u_\varepsilon + F_{p'} \left(\frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} \right) = f \quad \text{sur } \Omega,$$

$$(2.23) \quad -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \in \beta(u_\varepsilon) \quad \text{sur } \Gamma.$$

admet une solution $u_\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap W^{1,p^*}(\Omega)$.

Multipliant l'équation (2.22) par

$$\frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} (\Psi - u_\varepsilon)^+$$

et intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} a(\Psi - u_\varepsilon, (\Psi - u_\varepsilon)^+) - \frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right) (\Psi - u_\varepsilon)^+ d\Gamma + \left\| \frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^{p'}}^{p'} \\ & \leq \|f - L\Psi\|_{L^p} \left\| \frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^{p'}}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (2.19), et grâce à (2.23), on a

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} - \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right) (\Psi - u_\varepsilon)^+ & \geq \left(\beta^-(\Psi) + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} \right) (\Psi - u_\varepsilon)^+ \\ & \geq (\beta^-(\Psi) - \beta^+(u_\varepsilon)) (\Psi - u_\varepsilon)^+ \geq 0 \quad \text{p. p. sur } \Gamma \end{aligned}$$

[aux points où $\beta^-(\Psi) = -\infty$, on a $(\Psi - u_\varepsilon)^+ = 0$].

On en déduit que

$$\left\| \frac{u_\varepsilon - P_K u_\varepsilon}{\varepsilon} \right\|_{L^{p'}}^{p'-1} \leq \|f - L\Psi\|_{L^p}$$

et par conséquent :

$$\|L u_\varepsilon\|_{L^p} \leq 2 \|f\|_{L^p} + \|L\Psi\|_{L^p}.$$

Donc on a (théorèmes I.10 et I.11) :

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2 \cap W^{1,p^*}} \leq C (\|f\|_{L^p} + \|L\Psi\|_{L^p}).$$

Le passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est alors immédiat.

REMARQUE I.31. — Explicitons l'hypothèse (2.19) sur divers β correspondants aux exemples du paragraphe I.2.1.

Exemple 1 : (2.19) s'écrit $\Psi \leq 0$ p. p. sur Γ (on retrouve la condition usuelle).

Exemple 2 : (2.19) s'écrit $\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \leq 0$ p. p. sur Γ .

Exemple 3 : (2.19) s'écrit $\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + k \Psi \leq 0$ p. p. sur Γ .

Exemple 4 : (2.19) s'écrit $\Psi^+ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \leq 0$ p. p. sur Γ .

REMARQUE I.32. — Utilisant une méthode voisine on montre le résultat suivant. Soient β et γ deux graphes maximaux monotones dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tels que $D(\beta) \cap D(\gamma) \neq \emptyset$. Alors pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe

$$u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,p^*}(\Omega)$$

unique solution de l'équation

$$\begin{aligned} Lu + \gamma(u) &\ni f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial \nu} &\in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma. \end{aligned}$$

I.2.3. PRINCIPE DU MAXIMUM ET THÉORÈMES DE COMPARAISON. — Pour simplifier l'exposé, nous nous limiterons à considérer des équations de la forme

$$Lu = f \quad \text{sur } \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{sur } \Gamma,$$

où

$$Lu = \sum_{i,j} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u,$$

avec

$$c(x) \geq c > 0 \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

Étant donné un graphe maximal monotone β , on désigne par β^{-1} le graphe (maximal monotone) inverse de β ; ce qui permet de donner un sens à $(\beta^{-1})^+$ et $(\beta^{-1})^-$.

PROPOSITION I.11. — Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in H^2(\Omega)$ la solution de l'équation

$$Lu = f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

On a alors p. p. sur Ω ,

$$\text{Min} \left\{ (\beta^{-1})^+(0), \inf_{x \in \Omega} \left(\frac{f(x)}{c(x)} \right) \right\} \leq u \leq \text{Max} \left\{ (\beta^{-1})^-(0), \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{f(x)}{c(x)} \right) \right\}.$$

Démonstration. — Soit

$$k = \text{Max} \left\{ (\beta^-)^-(0), \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{f(x)}{c(x)} \right) \right\}.$$

Montrons que $u \leq k$; l'autre inégalité s'en déduisant en remplaçant u par $-u$. Multipliant l'équation $Lu = f$ par $(u - k)^+$ et intégrant par parties, il vient

$$a(u - k, (u - k)^+) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} (u - k)^+ d\Gamma \leq \int_{\Omega} (f - ck)(u - k)^+ dx \leq 0.$$

D'autre part :

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} (u - k)^+ \geq \beta^-(u) (u - k)^+ \geq 0 \quad \text{p. p. sur } \Gamma$$

[car si $u > k \geq (\beta^-)^-(0)$, on a $\beta^-(u) \geq 0$].

Par conséquent $(u - k)^+ = 0$, d'où $u \leq k$ p. p. sur Ω .

De la proposition I.11 découle directement le

COROLLAIRE I.6. — Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in H^2(\Omega)$ la solution de l'équation

$$Lu = f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

Si $\beta^-(0) \leq 0$, alors

$$u \geq \text{Min} \left\{ 0, \inf_{x \in \Omega} \left(\frac{f(x)}{c(x)} \right) \right\}.$$

Si $\beta^+(0) \geq 0$, alors

$$u \leq \text{Max} \left\{ 0, \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{f(x)}{c(x)} \right) \right\}.$$

Si $R(\beta) \subset [0, +\infty[$ alors

$$u \leq \sup_{x \in \Omega} \left(\frac{f(x)}{c(x)} \right).$$

Si $R(\beta) \subset]-\infty, 0]$ alors

$$u \geq \inf_{x \in \Omega} \left(\frac{f(x)}{c(x)} \right).$$

On a encore les corollaires suivants :

COROLLAIRE I.7. — Soient β et $\hat{\beta}$ deux graphes maximaux monotones tels que $\beta(r) = \hat{\beta}(r)$, $\forall r > 0$ et $\beta^-(0) \leq 0$, $\hat{\beta}^-(0) \leq 0$.

Soit $f \in L^2(\Omega)$, avec $f \geq 0$ p. p. sur Ω , et soient u et $\hat{u}$ les solutions respectives de

$$L u = f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma,$$

$$L \hat{u} = f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \in \hat{\beta}(\hat{u}) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

Alors $u = \hat{u}$ p. p. sur Ω .

Démonstration. — D'après le corollaire I.6, on sait que $u \geq 0$ et $\hat{u} \geq 0$ p. p. sur Ω . Multipliant l'équation $L(u - \hat{u}) = 0$ par $(u - \hat{u})^+$ et intégrant par parties, il vient

$$a((u - \hat{u}), (u - \hat{u})^+) - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \right) (u - \hat{u})^+ d\Gamma = 0.$$

Or on a p. p. sur Ω ,

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \right) (u - \hat{u})^+ \geq (\beta^-(u) - \hat{\beta}^+(\hat{u})) (u - \hat{u})^+ \geq 0.$$

Par conséquent $(u - \hat{u})^+ = 0$ et $u \leq \hat{u}$ p. p.

COROLLAIRE I.8. — Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $u \in H^2(\Omega)$ la solution du problème,

$$\begin{aligned} L u &= f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \\ u &\geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{p. p. sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Alors si $f \geq 0$ p. p. sur Ω , u coïncide avec la solution du problème de Neumann, i. e. $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ p. p. sur Γ .

Si $f \leq 0$ p. p. sur Ω , u coïncide avec la solution du problème de Dirichlet, i. e. $u = 0$ p. p. sur Γ .

Démonstration. — Si $f \geq 0$, on applique le corollaire I.7 avec β décrit à l'exemple 2 et $\hat{\beta}$ décrit à l'exemple 4 du paragraphe I.2.1.

Si $f \leq 0$, on a d'après le corollaire I.6, $u \leq 0$ p. p. sur Ω , et comme $u \geq 0$ p. p. sur Γ il vient $u = 0$ p. p. sur Γ .

THÉORÈMES DE COMPARAISON.

PROPOSITION I.12. — Soient $f, \hat{f} \in L^2(\Omega)$ tels que $f \geq \hat{f}$ p. p. sur Ω et soient $u, \hat{u}$ les solutions respectives des équations

$$L u = f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma,$$

$$L \hat{u} = \hat{f} \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \in \beta(\hat{u}) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

Alors on a $u \geq \hat{u}$ p. p. sur Ω .

Démonstration. — Multipliant l'équation $L(\hat{u} - u) = \hat{f} - f$ par $(\hat{u} - u)^+$ et intégrant par parties, il vient

$$a(\hat{u} - u, (\hat{u} - u)^+) - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) (\hat{u} - u)^+ d\Gamma \leq 0.$$

Or

$$- \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) (\hat{u} - u)^+ \geq (\beta^-(\hat{u}) - \beta^+(u)) (\hat{u} - u)^+ \geq 0 \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

D'où le résultat. On aurait aussi pu utiliser directement la remarque I.10.

REMARQUE I.33. — Avec les hypothèses de la proposition I.12 on a, en fait, un résultat plus précis :

$$\min \left\{ 0, \inf_{\Omega} \left(\frac{f - \hat{f}}{c} \right) \right\} \leq u - \hat{u} \leq \max \left\{ 0, \sup_{\Omega} \left(\frac{f - \hat{f}}{c} \right) \right\}.$$

PROPOSITION I.13. — Soient $f, \hat{f} \in L^p(\Omega)$ et soient $u, \hat{u}$ les solutions respectives des équations

$$Lu + u = f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad - \frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma,$$

$$L\hat{u} + \hat{u} = \hat{f} \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \in \beta(\hat{u}) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

Alors on a

$$\|u - \hat{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - \hat{f}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Démonstration. — Ce résultat est immédiat pour $p = 2$ et il découle de la remarque I.33 pour $p = +\infty$. Le cas général s'obtient par interpolation non linéaire (cf. Browder [4] ou Peetre [1]) en considérant l'application $f \mapsto u$.

REMARQUE I.34. — La proposition I.13 exprime que l'opérateur $A = L$ de domaine

$$D(A) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \cap W^{1,p^*}(\Omega) \text{ tels que } Lu \in L^p(\Omega) \text{ et } - \frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \text{ p. p. sur } \Gamma \right\}$$

est m -accrétif dans $L^p(\Omega)$ au sens de Kato [1] (hypermaximal accrétif au sens de Browder [5]).

Utilisant une technique semblable à celle de la démonstration du théorème I.6 on établit la

PROPOSITION I.14. — Soient $f, \hat{f} \in L^p(\Omega)$ et soient $u, \hat{u}$ les solutions respectives des équations

$$L u = f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma,$$

$$L \hat{u} = \hat{f} \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \in \beta(\hat{u}) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

Alors si $p < \frac{N}{2}$ on a $u, \hat{u} \in L^\infty(\Omega)$ avec

$$\|u - \hat{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|f - \hat{f}\|_{L^p(\Omega)}$$

et si $p > \frac{N}{2}$, on a $u, \hat{u} \in L^{\frac{pN}{N-2p}}(\Omega)$ avec

$$\|u - \hat{u}\|_{L^{\frac{pN}{N-2p}}(\Omega)} \leq C \|f - \hat{f}\|_{L^p(\Omega)} \quad (13).$$

DÉPENDANCE DE u EN β .

PROPOSITION I.15. — Soient β et $\hat{\beta}$ deux graphes maximaux monotones tels que

$$(2.24) \quad \beta^-(r) \leq \hat{\beta}^+(r), \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soient $u, \hat{u}$ les solutions respectives des équations

$$L u = f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \quad \text{p. p. sur } \Gamma,$$

$$L \hat{u} = f \quad \text{p. p. sur } \Omega, \quad -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} \in \hat{\beta}(\hat{u}) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

Alors on a $u \geq \hat{u}$ p. p. sur Ω .

Démonstration. — Multipliant l'équation $L(\hat{u} - u) = 0$ par $(\hat{u} - u)^+$ et intégrant par parties, il vient

$$a(\hat{u} - u, (\hat{u} - u)^+) - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) (\hat{u} - u)^+ d\Gamma = 0.$$

Or on a p. p. sur Γ ,

$$-\left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) (\hat{u} - u)^+ \geq (\hat{\beta}^-(\hat{u}) - \beta^+(u)) (\hat{u} - u)^+ \geq 0.$$

En effet, si $\hat{u} > u$, soit $\hat{u} > \xi > u$. On a alors

$$\hat{\beta}^-(\hat{u}) \geq \hat{\beta}^+(\xi) \geq \beta^-(\xi) \geq \beta^+(u).$$

(13) C dépend uniquement de Ω, N, p et des coefficients de L .

Par conséquent, $(\hat{u} - u)^+ = 0$ et $\hat{u} \leq u$ p. p. sur Ω .

REMARQUE I.35. — On aurait aussi pu utiliser la remarque I.18 car l'hypothèse (2.24) est équivalente à

$$(2.25) \quad \begin{cases} j(\text{Max}\{r, \hat{r}\}) + \hat{j}(\text{Min}\{r, \hat{r}\}) \leq j(r) + \hat{j}(\hat{r}), & \forall r, \hat{r} \in \mathbf{R}; \\ \beta = \partial j, \hat{\beta} = \partial \hat{j}. \end{cases}$$

En effet, (2.25) $\Rightarrow$ (2.24).

Soient $r < \hat{r}$; on a d'après (2.25) :

$$j(\hat{r}) + \hat{j}(r) \leq j(r) + \hat{j}(\hat{r}).$$

Mais

$$\begin{aligned} j(\hat{r}) &\geq j(r) + f(\hat{r} - r), & \forall f \in \beta(r), \\ \hat{j}(r) &\geq \hat{j}(\hat{r}) + \hat{f}(r - \hat{r}), & \forall \hat{f} \in \hat{\beta}(\hat{r}). \end{aligned}$$

Par addition il vient

$$(f - \hat{f})(\hat{r} - r) \leq 0, \quad \text{soit } f \leq \hat{f}.$$

Faisant tendre $\hat{r}$ vers r on obtient $\beta^+(r) \leq \hat{\beta}^-(r)$; d'où en particulier (2.24). Réciproquement (2.24) $\Rightarrow$ (2.25).

Montrons d'abord que

$$(I + \lambda\beta)^{-1}x \geq (I + \lambda\hat{\beta})^{-1}x, \quad \forall \lambda > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

En effet, soient

$$r = (I + \lambda\beta)^{-1}x, \quad \hat{r} = (I + \lambda\hat{\beta})^{-1}x.$$

Si $\hat{r} > r$, il existe ξ , $\hat{r} > \xi > r$ et l'on a

$$\frac{x - r}{\lambda} \leq \beta^+(r) \leq \beta^-(\xi) \leq \hat{\beta}^+(\xi) \leq \hat{\beta}^-(r) \leq \frac{x - \hat{r}}{\lambda}.$$

Par suite $\hat{r} \leq r$, et l'on arrive à une contradiction; donc $\hat{r} \leq r$. On en déduit que

$$\frac{x - (I + \lambda\beta)^{-1}x}{\lambda} \leq \frac{x - (I + \lambda\hat{\beta})^{-1}x}{\lambda}.$$

Autrement dit :

$$j'_\lambda(x) \leq \hat{j}'_\lambda(x) \quad \text{sur } \mathbf{R}.$$

Intégrant cette inégalité sur $[r, \hat{r}]$ (avec $r < \hat{r}$), il vient

$$j_\lambda(\hat{r}) + \hat{j}_\lambda(r) \leq \hat{j}_\lambda(\hat{r}) + j_\lambda(r).$$

Passant à la limite quand $\lambda \rightarrow 0$, on obtient (2.25).

CHAPITRE II

PROBLÈMES UNILATÉRAUX
ASSOCIÉS A DES OPÉRATEURS PARABOLIQUES

II.1. — Un résultat abstrait d'existence

Avant d'aborder l'étude des problèmes unilatéraux associés à des opérateurs paraboliques usuels, nous commençons par indiquer un résultat très général d'existence.

Soit V un espace de Banach réflexif et soit $L : D(L) \subset V \rightarrow V'$ un opérateur monotone (L pouvant être multivoque; L n'est pas nécessairement supposé linéaire ni maximal monotone).

Soit Φ une fonction convexe s. c. i. sur V à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, $\Phi \not\equiv +\infty$ et soit $D(\Phi) = \{u \in V; \Phi(u) < +\infty\}$.

Soit $A : \overline{D(\Phi)} \rightarrow V'$ un opérateur pseudo-monotone et borné [i. e. pour tout filtre $\{u_i\}$ borné de V tel que $\lim u_i = u$ dans V faible et $\limsup (A u_i, u_i - u) \leq 0$, alors $\liminf (A u_i, u_i - v) \geq (A u, u - v)$, $\forall v \in D(\Phi)$ et A transforme les bornés de V en des bornés de V']. On a alors le

THÉORÈME II.1. — *On suppose qu'il existe $v_0 \in D(L) \cap D(\Phi)$ et $w_0 \in L v_0$ tels que*

$$(1.1) \quad \lim_{\substack{\|v\| \rightarrow +\infty \\ v \in D(\Phi)}} (A v + w_0, v - v_0) + \Phi(v) = +\infty.$$

Alors il existe $u \in D(\Phi)$ tel que

$$(w + A u, v - u) + \Phi(v) - \Phi(u) \geq 0, \quad \forall v \in D(L) \cap D(\Phi), \quad \forall w \in L v.$$

REMARQUE II.1. — L'hypothèse (1.1) est en particulier vérifiée s'il existe $v_0 \in D(L) \cap D(\Phi)$ tel que

$$(1.2) \quad \lim_{\substack{\|v\| \rightarrow +\infty \\ v \in D(\Phi)}} \frac{(A v, v - v_0)}{\|v\|} = +\infty.$$

[Noter que $\Phi(v) \geq C_1 \|v\| + C_2$, $\forall v \in D(\Phi)$.]

La démonstration du théorème II.1 est basée sur le lemme suivant :

LEMME II.1. — *Soit K un convexe fermé non vide de V . Alors le théorème II.1 est vrai pour $\Phi = \Psi_K$ (fonction indicatrice de K).*

Démonstration du lemme II.4. — Ce résultat est prouvé dans Brézis [2] sous l'hypothèse (1.2) et donc en particulier lorsque K est borné. Dans le cas général, soit $\tilde{L}$ un prolongement maximal monotone relatif à $K \times V'$ de $L|_K$ [restriction de L à $D(L) \cap K$] et soit $K_n = \{u \in K; \|u\| \leq n\}$.

D'après ce qui précède il existe $u_n \in K_n$ tel que

$$(1.3) \quad (w + A u_n, v - u_n) \geq 0, \quad \forall v \in D(\tilde{L}) \cap K_n, \quad \forall w \in \tilde{L} v.$$

A partir d'un certain rang, on a

$$(w_0 + A u_n, v_0 - u_n) \geq 0.$$

Il résulte de l'hypothèse (1.1) que la suite u_n est bornée. On considère alors une sous-suite u_{n_k} telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u$, $A u_{n_k} \rightharpoonup g$ et

$$\limsup (A u_{n_k}, u_{n_k} - u) \leq (g, v - u) + (w, v - u), \quad \forall v \in D(\tilde{L}), \quad \forall w \in \tilde{L} v.$$

Or

$$\inf_{\substack{v \in D(\tilde{L}) \\ w \in \tilde{L} v}} (g, v - u) + (w, v - u) \leq 0.$$

Si non il existerait $\alpha > 0$ tel que

$$(w + g, v - u) \geq \alpha, \quad \forall v \in D(\tilde{L}), \quad \forall w \in \tilde{L} v$$

et ceci impliquerait, d'après la maximalité de $\tilde{L}$ que $-g \in \tilde{L} u$. On obtiendrait alors une contradiction en prenant $v = u$ et $w = -g$. Par conséquent, $\limsup (A u_{n_k}, u_{n_k} - u) \leq 0$ et donc

$$\liminf (A u_{n_k}, u_{n_k} - v) \geq (A u, u - v), \quad \forall v \in K.$$

Enfin, passant à la limite dans (1.3), on a

$$(w + A u, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in D(\tilde{L}), \quad \forall w \in \tilde{L} v.$$

Démonstration du théorème II.4. — On utilise un artifice dû à Mosco [1] en introduisant $X = V \times \mathbf{R}$ mis en dualité avec $X' = V' \times \mathbf{R}$ par le produit scalaire

$$\langle [u, \lambda], [f, \mu] \rangle = (u, f) + \lambda \mu.$$

On pose

$$K = \{[u, \lambda] \in X; \Phi(u) \leq \lambda\};$$

$$\tilde{A}[u, \lambda] = [A u, 1], \quad \tilde{L}[u, \lambda] = [L u, 0].$$

Il est immédiat que $\tilde{A}$ est pseudo-monotone et borné de X dans X' et que $\tilde{L}$ est monotone. Soient $\tilde{v}_0 = [v_0, \Phi(v_0)]$ et $\tilde{w}_0 = [w_0, 0]$. Montrons

que (1.1) est vérifié par $\tilde{L}$, $\tilde{A}$, K , i. e.

$$\lim_{\substack{\|v\| + \frac{\lambda}{\Phi(v)} \rightarrow +\infty \\ \Phi(v) \leq \lambda}} (A v, v - v_0) + \lambda - \Phi(v_0) + (w_0, v - v_0) = +\infty.$$

Autrement dit, il faut prouver que, pour tout C , l'ensemble

$$E = \{ [v, \lambda]; \Phi(v) \leq \lambda \text{ et } (A v, v - v_0) + \lambda - \Phi(v_0) + (w_0, v - v_0) \leq C \}$$

est borné dans X .

Or, si $[v, \lambda] \in E$, on a

$$(A v + w_0, v - v_0) + \Phi(v) \leq C + \Phi(v_0)$$

et grâce à l'hypothèse (1.1), $\|v\|$ est borné.

Comme de plus :

$$\Phi(v) \leq \lambda \leq C - (A v + w_0, v - v_0) + \Phi(v_0),$$

il en résulte que $|\lambda|$ est borné. Donc E est borné. Par conséquent, d'après le lemme II.1, il existe $[u, \lambda]$ avec $\Phi(u) \leq \lambda$, tel que

$$(w, v - u) + (A u, v - u) + \mu - \lambda \geq 0, \quad \forall v \in D(L), \quad \forall w \in L v, \quad \forall \mu \geq \Phi(v).$$

En particulier, on a

$$(w + A u, v - u) + \Phi(v) - \Phi(u) \geq 0, \quad \forall v \in D(L) \cap D(\Phi), \quad \forall w \in L v.$$

II.2. — Problème de Cauchy

II.2.1. EXISTENCE, UNICITÉ ET PROPRIÉTÉS DE LA SOLUTION FAIBLE.

— Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|$ et $\mathcal{V}$ un espace de Banach réflexif de norme $\|\cdot\|$ tels que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$$

avec injections continues et denses.

On suppose que la norme de $\mathcal{V}$ et la norme duale sur $\mathcal{V}'$ sont strictement convexes (ceci n'est pas restrictif car il existe toujours une norme équivalente ayant ces propriétés, cf. Lindenstrauss [1] et Asplund [1]).

Soit $\mathcal{F}$ l'application de dualité de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ associée à la jauge r^{p-1} ($2 \leq p < +\infty$), i. e. pour tout $u \in \mathcal{V}$; $\mathcal{F} u$ est défini de manière unique par les relations

$$(\mathcal{F} u, u) = \|u\|_{\mathcal{V}}^p \quad \text{et} \quad \|\mathcal{F} u\|_{\mathcal{V}'} = \|u\|_{\mathcal{V}}^{p-1}.$$

Il est bien connu que $\mathcal{F}$ est continu de $\mathcal{V}$ fort dans $\mathcal{V}'$ faible.

Pour $0 < T < +\infty$, on considère les espaces

$$V = L^p(0, T; \mathcal{V}), \quad H = L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad V' = L^{p'}(0, T; \mathcal{V}')$$

munis des normes usuelles de sorte que

$$V \subset H \subset V'$$

avec injections continues et denses.

On pose alors pour $u \in V$, $F u(t) = \mathcal{F}(u(t))$; grâce au résultat de l'appendice IV, $F u$ est mesurable et par suite $F : V \rightarrow V'$.

De plus, on a

$$\int_0^T (F u, u) dt = \|u\|_V^p, \quad \|F u\|_{V'} = \|u\|_V^{p-1},$$

F est donc l'application de dualité de V dans V' associée à la jauge r^{p-1} . Soit φ une fonction convexe s. c. i. sur $\mathcal{V}$ à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$. On pose

$$D(\varphi) = \{u \in \mathcal{V}; \varphi(u) < +\infty\} \quad \text{et} \quad \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}} = \text{fermeture de } D(\varphi) \text{ dans } \mathcal{H}.$$

La fonction Φ définie sur V par

$$\Phi(u) = \begin{cases} \int_0^T \varphi(u) dt & \text{si } \varphi(u) \in L^1(0, T; \mathbf{R}), \\ +\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$$

est convexe s. c. i. sur V et $\Phi \not\equiv +\infty$ (cf. appendice I); on notera

$$D(\Phi) = \{u \in V; \Phi(u) < +\infty\}.$$

PROBLÈME. — On cherche à résoudre les inéquations variationnelles d'évolution de la forme

$$(2.1) \quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dt} + A u, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u), & \forall v \in D(\Phi), \text{ p. p. sur }]0, T[; \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Par analogie avec la théorie linéaire des équations d'évolution, on associe au problème (2.1) une formulation faible. En intégrant (2.1) (formellement) sur $]0, T[$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + A u, v - u \right) dt + \int_0^T \varphi(v) dt - \int_0^T \varphi(u) dt \\ & \geq \int_0^T (f, v - u) dt + \frac{1}{2} \|v(T) - u(T)\|^2 - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$(2.2) \quad \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + A u, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2.$$

Plus précisément on est conduit à introduire dans $V \times V'$ le graphe M_{u_0} qui joue le rôle de l'opérateur $\frac{d}{dt} + \partial\Phi$.

Soit $u_0 \in \mathcal{H}$ fixé; on dit que $f \in M_{u_0}(u)$ si et seulement si $u \in D(\Phi)$, $f \in V'$ et

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2,$$

$$\forall v \in D(\Phi), \quad \frac{dv}{dt} \in V'.$$

Avec cette notation le problème (2.2) s'écrit $M_{u_0}(u) + A u \ni f$.

Une des propriétés essentielles de M_{u_0} est la suivante :

THÉORÈME II.2. — Si $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$, alors M_{u_0} est maximal monotone dans $V \times V'$.

La démonstration du théorème II.2 est basée sur le

LEMME II.2. — Soient $u \in D(\Phi)$, $g \in V'$ et $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$, alors on a

$$(2.3) \quad \inf_{\left\{ v \in D(\Phi); \frac{dv}{dt} \in V' \right\}} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} - g, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) + \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2 \leq 0.$$

Démonstration du lemme II.2. — On prouve (2.3) par l'absurde; supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(2.4) \quad \begin{cases} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} - g, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) + \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2 \geq \alpha, \\ \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'. \end{cases}$$

Soient $\xi \in D(\varphi)$ et $\varepsilon > 0$; posons

$$u_\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}\xi} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\varepsilon}} u(s) ds.$$

Autrement dit, u_ε est la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} u_\varepsilon + \varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dt} = u & \text{p. p. sur }]0, T[, \\ u_\varepsilon(0) = \xi. \end{cases}$$

Il est bien connu que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans V ; d'autre part, $u_\varepsilon \in D(\Phi)$ et plus précisément il existe $h \in \mathcal{V}'$ et $C \in \mathbf{R}$ (dépendant uniquement de φ) tels que

$$(2.5) \quad \Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u) + \varepsilon[\varphi(\xi) + (h, \xi) + C] + \int_0^T (h, u - u_\varepsilon) dt.$$

En effet, il existe $h \in \mathcal{V}'$ et $C \in \mathbf{R}$ tels que

$$\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) + (h, u) + C \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{V}.$$

Comme $\tilde{\varphi}$ est convexe et s. c. i., on a

$$\tilde{\varphi}(u_\varepsilon(t)) \leq e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \tilde{\varphi}(\xi) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}} \tilde{\varphi}(u(s)) ds.$$

Intégrant cette inéquation sur $]0, T[$, on obtient après un calcul direct,

$$\int_0^T \tilde{\varphi}(u_\varepsilon(t)) dt \leq \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}}\right) \tilde{\varphi}(\xi) + \int_0^T \left(1 - e^{\frac{s-T}{\varepsilon}}\right) \tilde{\varphi}(u(s)) ds \leq \varepsilon \tilde{\varphi}(\xi) + \int_0^T \tilde{\varphi}(u(s)) ds.$$

Donc en remplaçant $\tilde{\varphi}(\cdot)$ par $\varphi(\cdot) + (h, \cdot) + C$, on arrive à (2.5).

Par conséquent,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(u_\varepsilon) = \Phi(u) \quad \left[\text{puisque par ailleurs } \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(u_\varepsilon) \geq \Phi(u) \right].$$

Reportant $v = u_\varepsilon$ dans (2.4), on a

$$-\varepsilon \int_0^T \left| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right|^2 dt - \int_0^T (g, u_\varepsilon - u) dt + \Phi(u_\varepsilon) - \Phi(u) + \frac{1}{2} |\xi - u_0|^2 \geq \alpha.$$

A fortiori, on a

$$(2.6) \quad -\int_0^T (g, u_\varepsilon - u) dt + \Phi(u_\varepsilon) - \Phi(u) + \frac{1}{2} |\xi - u_0|^2 \geq \alpha.$$

Passant à la limite dans (2.6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$, il vient

$$\frac{1}{2} |\xi - u_0|^2 \geq \alpha > 0, \quad \forall \xi \in D(\varphi).$$

On arrive ainsi à une contradiction puisque $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$.

Démonstration du théorème II.2. — M_{u_0} est monotone; en effet si $f_1 \in M_{u_0}(u_1)$ et si $f_2 \in M_{u_0}(u_2)$, on a par définition :

$$(2.7) \quad \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u_1 \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u_1) \geq \int_0^T (f_1, v - u_1) dt - \frac{1}{2} |v(0) - u_0|^2,$$

$$(2.8) \quad \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u_2 \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u_2) \geq \int_0^T (f_2, v - u_2) dt - \frac{1}{2} |v(0) - u_0|^2,$$

$$\forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'.$$

Posons $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$; par addition de (2.7) et (2.8), il vient

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + 2 \Phi(v) - \Phi(u_1) - \Phi(u_2) \\ & \geq \int_0^T (f_1, v - u_1) dt + \int_0^T (f_2, v - u_2) dt - |v(0) - u_0|^2, \quad \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \\ & \geq \int_0^T \left(\frac{f_1 + f_2}{2}, v - u \right) dt - |v(0) - u(0)|^2 - \frac{1}{4} \int_0^T (f_1 - f_2, u_1 - u_2) dt. \end{aligned}$$

Le lemme II.2 (appliqué avec $g = \frac{f_1 + f_2}{2}$) montre que

$$\int_0^T (f_1 - f_2, u_1 - u_2) dt \geq 0.$$

On établit que M_{u_0} est maximal monotone à l'aide du lemme suivant :

LEMME II.3. — Soit $u_0 \in D(\varphi)$ et soit $f \in H$. Alors il existe $u \in D(\Phi)$ tel que $\frac{du}{dt} \in H$, $u(0) = u_0$ et vérifiant pour tout $v \in D(\Phi)$:

$$\left(\frac{du}{dt} + F u, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u) \quad p. p. \text{ sur }]0, T[.$$

Démonstration du lemme II.3. — Grâce au théorème II.1, on sait qu'il existe $u \in D(\Phi)$ tel que

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + F u, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt, \\ & \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V' \quad \text{et} \quad v(0) = u_0. \end{aligned} \right.$$

On reporte dans (2.9) :

$$v = u_\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} u_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}} u(s) ds$$

et on obtient alors

$$\varepsilon \int_0^T \left| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right|^2 dt + \frac{\varepsilon}{p} \|u_\varepsilon(T)\|^p - \frac{\varepsilon}{p} \|u_\varepsilon(0)\|^p \leq \Phi(u_\varepsilon) - \Phi(u) + \varepsilon \int_0^T \left(f, \frac{du_\varepsilon}{dt} \right) dt.$$

Utilisant (2.5) et divisant par ε , il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right|^2 dt + \frac{1}{p} \|u_\varepsilon(T)\|^p - \frac{1}{p} \|u_0\|^p \\ & \leq \varphi(u_0) + (h, u_0) + C + \int_0^T \left(h, \frac{du_\varepsilon}{dt} \right) dt + \int_0^T \left(f, \frac{du_\varepsilon}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

Mais

$$\int_0^T \left(h, \frac{du_\varepsilon}{dt} \right) dt = (h, u_\varepsilon(T)) - (h, u_0).$$

Il en résulte que $\int_0^T \left| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right|^2 dt$ demeure borné quand $\varepsilon \rightarrow 0$; par conséquent $\frac{du}{dt} \in H$ et $u(0) = u_0$. On prend maintenant dans (2.9),

$$v = (1 - \theta) u + \theta w$$

avec $\theta \in]0, 1]$, $w \in D(\Phi)$, $\frac{dw}{dt} \in V'$, $w(0) = u_0$.

Après division par θ et passage à la limite quand $\theta \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{du}{dt} + F u, w - u \right) dt + \Phi(w) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, w - u) dt, \\ & \forall w \in D(\Phi); \quad \frac{dw}{dt} \in V'; \quad w(0) = u_0. \end{aligned}$$

Par suite :

$$\int_0^T \left(\frac{du}{dt} + F u, w - u \right) dt + \Phi(w) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, w - u) dt, \quad \forall w \in D(\Phi).$$

[On pourra par exemple utiliser l'approximation de $w \in D(\Phi)$ par $w_\varepsilon = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} u_0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}} w(s) ds$ qui est telle que $w_\varepsilon \rightarrow w$ dans V et $\Phi(w_\varepsilon) \rightarrow \Phi(w)$.]

Fin de la démonstration du théorème II.2. — Pour prouver que M_{u_0} est maximal monotone, il suffit de montrer que $M_u + F$ est surjectif, i. e.

pour tout $f \in V'$ on cherche $u \in D(\Phi)$ qui vérifie

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + F u, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} |v(0) - u_0|^2, \\ \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'. \end{array} \right.$$

On considère une suite $f_n \in H$ telle que $f_n \rightarrow f$ dans V' et une suite $u_{0n} \in D(\varphi)$ telle que $u_{0n} \rightarrow u_0$ dans $\mathcal{H}$. Grâce au lemme II.3 il existe $u_n \in D(\Phi)$ tel que $\frac{du_n}{dt} \in H$ et $u_n(0) = u_{0n}$ vérifiant, pour tout $v \in D(\Phi)$,

$$\left(\frac{du_n}{dt} + F u_n, v - u_n \right) + \varphi(v) - \varphi(u_n) \geq (f_n, v - u_n) \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

On a donc

$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + F u_n, v - u_n \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u_n) \\ \geq \int_0^T (f_n, v - u_n) dt - \frac{1}{2} |v(0) - u_{0n}|^2, \quad \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'. \end{array} \right.$$

Il est immédiat que u_n demeure dans un borné de V et que $\Phi(u_n)$ demeure borné. On extrait une sous-suite u_{n_k} telle que $\lim u_{n_k} = u$ dans V faible avec $u \in D(\Phi)$ et $\lim F u_{n_k} = g$ dans V' faible. On a

$$\begin{aligned} & \limsup \int_0^T (F u_{n_k}, u_{n_k} - u) dt \\ & \leq \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + g - f, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) + \frac{1}{2} |v(0) - u_0|^2, \\ & \quad \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'. \end{aligned}$$

Grâce au lemme II.2, il vient

$$(2.12) \quad \limsup \int_0^T (F u_{n_k}, u_{n_k} - u) dt \leq 0$$

et par conséquent :

$$\liminf \int_0^T (F u_{n_k}, u_{n_k} - v) dt \geq \int_0^T (F u, u - v) dt, \quad \forall v \in V.$$

Passant à la limite dans (2.11) on obtient (2.10). Ceci achève la démonstration du théorème II.2; il est toutefois important pour la suite de faire quelques remarques supplémentaires. On a, en fait, $\lim u_n = u$ dans V

faible et $\lim F u_n = F u$ dans V' faible (puisque la limite est unique grâce à la monotonie de $M_{u_0} + F$). Par ailleurs, on a

$$\lim \int_0^T (F u_n - F u, u_n - u) dt = 0;$$

d'où en particulier :

$$\lim \int_{t_1}^{t_2} (F u_n - F u, u_n - u) dt = 0, \quad \forall t_1, t_2 [0, T],$$

ce qui implique

$$\lim \int_{t_1}^{t_2} (F u_n, u_n) dt = \int_{t_1}^{t_2} (F u, u) dt.$$

D'autre part, u_n converge vers u dans $C([0, T]; \mathcal{H})$.

En effet, on a

$$(2.13) \quad \left(\frac{du_n}{dt} + F u_n, u_n - u_m \right) + \varphi(u_m) - \varphi(u_n) \geq (f_n, u_n - u_m) \quad \text{p. p. sur }]0, T[,$$

$$(2.14) \quad \left(\frac{du_m}{dt} + F u_m, u_n - u_m \right) + \varphi(u_n) - \varphi(u_m) \geq (f_m, u_n - u_m) \quad \text{p. p. sur }]0, T].$$

Ajoutant (2.13) et (2.14) et intégrant sur $]0, t[, t \leq T$, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |u_n(t) - u_m(t)|^2 + \int_0^t (F u_n - F u_m, u_n - u_m) ds \\ & \leq \int_0^t (f_n - f_m, u_n - u_m) ds + \frac{1}{2} |u_{0n} - u_{0m}|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{2} |u_n(t) - u_m(t)|^2 \leq \|f_n - f_m\|_{V'} \|u_n - u_m\|_V + \frac{1}{2} |u_{0n} - u_{0m}|^2$$

et par conséquent u_n est de Cauchy dans $C([0, T]; \mathcal{H})$. Comme par ailleurs $\lim u_n = u$ dans V faible, on a $\lim u_n = u$ dans $C([0, T]; \mathcal{H})$.

Nous avons groupé dans le théorème suivant diverses propriétés de M_{u_0} .

THÉORÈME II.3. — Soit $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$ et soit $f \in M_{u_0}(u)$ alors $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ et $u(0) = u_0$. De plus, pour tout $v \in D(\Phi)$ tel que $\frac{dv}{dt} \in V'$, la fonction $t \mapsto |u(t) - v(t)|^2$ est à variation bornée et on a l'inéquation « ponctuelle » :

$$(2.15) \quad -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u - v|^2 + \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)$$

au sens des mesures sur $]0, T[$.

D'autre part, si $f_1 \in M_{u_1(0)}(u_1)$ et si $f_2 \in M_{u_2(0)}(u_2)$ alors on a

$$\frac{1}{2} |u_1(t) - u_2(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |u_1(0) - u_2(0)|^2 + \int_0^t (f_1 - f_2, u_1 - u_2) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Démonstration du théorème II.3. — Soit $g = f + F u$; on a donc $M_{u_0}(u) + F u \ni g$.

Reprenons l'approximation utilisée à la fin de la démonstration du théorème II.2. Soit $g_n \in H$ tel que $g_n \rightarrow g$ dans V' et soit $u_{0n} \in D(\varphi)$ tel que $u_{0n} \rightarrow u_0$ dans $\mathcal{H}$. Soit $u_n \in D(\Phi)$ la solution (lemme II.3) de l'inéquation

$$(2.16) \quad \begin{cases} \left(\frac{du_n}{dt} + F u_n, v - u_n \right) + \varphi(v) - \varphi(u_n) \geq (g_n, v - u_n), \\ \forall v \in D(\Phi), \text{ p. p. sur }]0, T[; \quad u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Intégrant (2.16) sur $]t_1, t_2[$ avec $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, on obtient

$$(2.17) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} |u_n(t_1) - v(t_1)|^2 - \frac{1}{2} |u_n(t_2) - v(t_2)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt}, v - u_n \right) dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} (F u_n, v - u_n) dt + \int_{t_1}^{t_2} \varphi(v) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(u_n) dt \geq \int_{t_1}^{t_2} (g_n, v - u_n) dt. \end{cases}$$

Grâce aux remarques faites à la fin de la démonstration du théorème II.2, le passage à la limite dans (2.17) est immédiat, et on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u(t_1) - v(t_1)|^2 - \frac{1}{2} |u(t_2) - v(t_2)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \varphi(v) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(u) dt \geq \int_{t_1}^{t_2} (f, v - u) dt. \end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction

$$-\frac{1}{2} |u(t) - v(t)|^2 + \int_0^t \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) ds + \int_0^t \varphi(v) ds - \int_0^t \varphi(u) ds - \int_0^t (f, v - u) ds$$

est croissante sur $[0, T]$; d'où (2.15).

Établissons maintenant la seconde partie du théorème II.3.

On a

$$(2.18) \quad \begin{cases} \int_0^t \left(\frac{dv}{dt}, v - u_1 \right) ds + \int_0^t \varphi(v) ds - \int_0^t \varphi(u_1) ds \\ \geq \int_0^t (f_1, v - u_1) ds + \frac{1}{2} |v(t) - u_1(t)|^2 - \frac{1}{2} |v(0) - u_1(0)|^2, \end{cases}$$

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^t \left(\frac{dv}{dt}, v - u_2 \right) ds + \int_0^t \varphi(v) ds - \int_0^t \varphi(u_2) ds \\ & \geq \int_0^t (f_2, v - u_2) + \frac{1}{2} |v(t) - u_2(t)|^2 - \frac{1}{2} |v(0) - u_2(0)|^2. \end{aligned} \right.$$

Posons $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$; par addition de (2.18) et (2.19), il vient

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^t \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) ds + 2 \int_0^t \varphi(v) ds - 2 \int_0^t \varphi(u) ds \\ & \geq \int_0^t (f_1 + f_2, v - u) ds - \frac{1}{2} \int_0^t (f_1 - f_2, u_1 - u_2) ds + \frac{1}{2} |v(t) - u_1(t)|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} |v(t) - u_2(t)|^2 - \frac{1}{2} |v(0) - u_1(0)|^2 - \frac{1}{2} |v(0) - u_2(0)|^2, \\ & \quad \forall v \in D(\Phi); \frac{dv}{dt} \in V'. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{2} |v(t) - u_1(t)|^2 + \frac{1}{2} |v(t) - u_2(t)|^2 \geq \frac{1}{4} |u_1(t) - u_2(t)|^2$$

et

$$\frac{1}{2} |v(0) - u_1(0)|^2 + \frac{1}{2} |v(0) - u_2(0)|^2 = |v(0) - u(0)|^2 + \frac{1}{4} |u_1(0) - u_2(0)|^2.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} |u_1(t) - u_2(t)|^2 - \frac{1}{4} |u_1(0) - u_2(0)|^2 - \frac{1}{2} \int_0^t (f_1 - f_2, u_1 - u_2) ds \\ & \geq 2 \int_0^t \left(\frac{dv}{dt} - \frac{f_1 + f_2}{2}, v - u \right) ds + \int_0^t \varphi(v) ds - \int_0^t \varphi(u) ds + \frac{1}{2} |v(0) - u(0)|^2. \end{aligned}$$

On achève la démonstration à l'aide du lemme II.2 (appliqué avec $T=t$).

REMARQUE II.2. — Supposons que V et V' sont uniformément convexes [ou seulement localement uniformément convexes ⁽¹⁴⁾] alors $f \in M_{u_0}(u)$ si et seulement si il existe des suites $u_n \in D(\Phi)$ avec $\frac{du_n}{dt} \in H$, $f_n \in V'$ et $u_{0n} \in D(\varphi)$ vérifiant

$$\begin{aligned} & \left(\frac{du_n}{dt}, v - u_n \right) + \varphi(v) - \varphi(u_n) \geq (f_n, v - u_n), \\ & \forall v \in D(\Phi), \text{ p. p. sur }]0, T[; \quad u_n(0) = u_{0n}, \end{aligned}$$

⁽¹⁴⁾ D'après un résultat très récent de Troyanski [1] il existe une norme équivalente localement uniformément convexe sur tout espace réflexif.

telles que $\lim u_n = u$ dans $V \text{ fort} \cap C([0, T]; \mathcal{H})$, $\lim f_n = f$ dans $V' \text{ fort}$ et $\lim u_{0n} = u_0$ dans $\mathcal{H} \text{ fort}$ ⁽¹⁵⁾. Pour cela on reprend la démonstration du théorème II.3; les convergences fortes résultent des hypothèses faites sur V et V' ainsi que des propriétés suivantes :

$$\lim u_n = u \text{ dans } V \text{ faible}, \quad \limsup \int_0^T (F u_n, u_n - u) dt \leq 0.$$

REMARQUE II.3. — Soit $u \in D(\Phi)$ et soit $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$; on peut chercher à déterminer dans quelles conditions l'inéquation

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} |v(0) - u_0|^2, \\ \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V' \end{array} \right.$$

équivalent à

$$(2.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt, \\ \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'; \quad v(0) = u_0. \end{array} \right.$$

Pour cela on introduit le convexe

$$T_\varphi = \left\{ v(0); v \in D(\Phi), \frac{dv}{dt} \in V' \right\}$$

et il est clair que $D(\varphi) \subset T_\varphi \subset \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$.

Alors (2.20) équivaut à (2.21) si et seulement si $u_0 \in T_\varphi$.

Il est immédiat que si (2.20) équivaut à (2.21) alors $u_0 \in T_\varphi$; car si $u_0 \notin T_\varphi$ (2.21) est vérifié par tout $u \in D(\Phi)$ ⁽¹⁶⁾ tandis que (2.20) admet au plus une solution. Réciproquement, supposons que $u_0 \in T_\varphi$ et soit $\bar{u}_0 \in D(\Phi)$ tel que $\frac{d\bar{u}_0}{dt} \in V'$ et $\bar{u}_0(0) = u_0$.

On introduit le graphe $\tilde{M}_{u_0}$ défini dans $V \times V'$ par $f \in \tilde{M}_{u_0}(u)$ si et seulement si $u \in D(\Phi)$ et $f \in V'$ vérifient (2.21). On a évidemment $M_{u_0} \subset \tilde{M}_{u_0}$. Il suffit donc de prouver que $\tilde{M}_{u_0}$ est monotone (puisque M_{u_0} est maximal

⁽¹⁵⁾ Utilisant la terminologie des systèmes de Friedrichs on pourrait dire ici que « weak = strong ».

⁽¹⁶⁾ Puisque l'ensemble des fonctions test est vide.

monotone). A cet effet, on établit d'abord l'analogue suivant du lemme II.2 :

$$\inf \left\{ \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} - g, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \leq 0; v \in D(\Phi), \frac{dv}{dt} \in V', v(0) = u_0 \right\} \leq 0$$

[prendre comme fonction test,

$$v = u_\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \bar{u}_0(t) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\varepsilon}} u(s) ds$$

et noter que

$$\Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u) + \int_0^T e^{-\frac{t}{\varepsilon}} [\varphi(\bar{u}_0) + (h, \bar{u}_0) + C] dt + \int_0^T (h, u - u_\varepsilon) dt,$$

d'où $\Phi(u_\varepsilon) \rightarrow \Phi(u)$].

On montre ensuite que $\tilde{M}_{u_0}$ est monotone en adaptant la démonstration du théorème II.2. Remarquons enfin que nous ne savons pas en général décrire explicitement l'ensemble T_φ ; il serait intéressant par exemple de trouver des conditions sur φ pour que $T_\varphi = \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{K}}$.

REMARQUE II.4. — Soit $\mathcal{K}$ un cône convexe fermé de $\mathcal{V}$ de sommet θ . On prend $\varphi = \Psi_{\mathcal{K}}$ (fonction indicatrice de $\mathcal{K}$). Soit $u_0 \in \overline{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}$ et soit $f \in M_{u_0}(u)$, alors la fonction $t \mapsto |u(t) - \theta|^2$ est absolument continue sur $[0, T]$ et on a l'égalité

$$(2.22) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - \theta|^2 = (f(t), u(t) - \theta) \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Principe de la démonstration. — Soit $g = f + F u$; on reprend l'approximation déjà considérée $u_n \in V$, $\frac{du_n}{dt} \in H$, $u_n(t) \in \mathcal{K}$ p. p. sur $]0, T[$,

$$\left(\frac{du_n}{dt}, v - u_n \right) + (F u_n, v - u_n) \geq (g_n, v - u_n), \quad \forall v \in \mathcal{K}, \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Comme $\mathcal{K}$ est un cône de sommet θ , on a l'égalité

$$(2.23) \quad \left(\frac{du_n}{dt}, \theta - u_n \right) + (F u_n, \theta - u_n) = (g_n, \theta - u_n) \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Le passage à la limite est immédiat (en intégrant (2.23) sur $]0, t[$) et conduit à (2.22).

COROLLAIRE II.4. — Soit $A : \overline{D(\Phi)} \rightarrow V'$ un opérateur pseudo-monotone et borné. On suppose qu'il existe $v_0 \in D(\Phi)$ tel que $\frac{dv_0}{dt} \in V'$ et

$$\lim_{\substack{\|v\| \rightarrow +\infty \\ v \in D(\Phi)}} \frac{\int_0^T (A v, v - v_0) dt + \Phi(v)}{\|v\|} = +\infty.$$

Alors pour tout $f \in V'$ et tout $u_0 \in \overline{D(\Phi)}^{\mathcal{H}}$ il existe $u \in D(\Phi) \cap C([0, T]; \mathcal{H})$ vérifiant

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + A u, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2,$$

$$\forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'$$

et de plus $u(0) = u_0$.

Démonstration. — Le problème s'écrit $M_{u_0}(u) + A u \ni f$. On applique alors le résultat suivant établi dans Brézis [3].

Soit M un graphe maximal monotone de $V \times V'$, et soit $A : \overline{D(M)} \rightarrow V'$ un opérateur pseudo-monotone et borné; on suppose qu'il existe $v_0 \in V$ tel que

$$\lim_{\substack{\|v\| \rightarrow +\infty \\ v \in D(M)}} \frac{\int_0^T (M v + A v, v - v_0) dt}{\|v\|} = +\infty.$$

Alors $M + A$ est surjectif.

Or si $v_0 \in D(\Phi)$ avec $\frac{dv_0}{dt} \in V'$, on a

$$\int_0^T (M_{u_0}(v), v - v_0) dt \geq - \int_0^T \left(\frac{dv_0}{dt}, v_0 - v \right) dt + \Phi(v) - \Phi(v_0) - \frac{1}{2} \|v_0(0) - u_0\|^2,$$

$$\forall v \in D(M_{u_0}).$$

Par suite :

$$\frac{\int_0^T (M_{u_0}(v) + A v, v - v_0) dt}{\|v\|} \geq \frac{\int_0^T (A v, v - v_0) dt + \Phi(v) - C_1 \|v\| - C_2}{\|v\|}.$$

D'où le résultat.

Nous avons groupé dans les remarques qui suivent quelques généralisations possibles des théorèmes II.2 et II.3 dans diverses directions.

REMARQUE II.5 (Problèmes non coercifs). — Il est bien connu, dans le cas des problèmes linéaires, que l'on peut résoudre l'équation

$$\frac{du}{dt} + A u = f, \quad u(0) = u_0,$$

supposant seulement qu'il existe λ tel que $(A u, u) + \lambda \|u\|^2 \geq \alpha \|u\|^2$, $\forall u$, $\alpha > 0$. La méthode consiste à se ramener à l'équation

$$\frac{dv}{dt} + A v + \lambda v = e^{\lambda t} f, \quad v(0) = u_0,$$

en faisant le changement de variable $v(t) = e^{\lambda t} u(t)$.

Cette technique ne peut être utilisée dans notre cadre. En effet, A n'étant pas nécessairement linéaire, il viendrait $e^{\lambda t} A e^{-\lambda t}$ au lieu de A ; d'autre part, prenant l'exemple $\varphi = \Psi_{\mathcal{H}}$ il viendrait $v(t) \in e^{\lambda t} \mathcal{H}$ et on aurait affaire à un convexe $\mathcal{H}(t)$ dépendant du temps, ce qui complique notablement le problème. Par contre, on pourra procéder de la manière suivante. Soit à résoudre

$$(2.24) \quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dt} + A u - \lambda u, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u), \\ \forall v \in D(\Phi), \text{ p. p. sur }]0, T[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

avec A « coercif » et $\lambda \in \mathbf{R}$.

On prend comme espace pivot $H = L^2(0, T; \mathcal{H})$ muni du produit scalaire $\int_0^T (u, v) e^{-2\lambda t} dt$.

Multipliant (2.24) par $e^{-2\lambda t}$ et intégrant (formellement) sur $]0, T[$ il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + A u - \lambda v, v - u \right) e^{-2\lambda t} dt + \int_0^T \varphi(v) e^{-2\lambda t} dt - \int_0^T \varphi(u) e^{-2\lambda t} dt \\ & \geq \int_0^T (f, v - u) e^{-2\lambda t} dt + \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt}, v - u \right) e^{-2\lambda t} dt - \lambda \int_0^T \|u - v\|^2 e^{-2\lambda t} dt \\ & = \int_0^T (f, v - u) e^{-2\lambda t} dt + \frac{1}{2} \|v(T) - u(T)\|^2 e^{-2\lambda T} - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2 \\ & \geq \int_0^T (f, v - u) e^{-2\lambda t} dt - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2. \end{aligned}$$

Plus précisément on est conduit à introduire dans $V \times V'$ le graphe $M_{u_0}^\lambda$ défini par $f \in M_{u_0}^\lambda(u)$ si et seulement si $u \in D(\Phi)$ et $f \in V'$ vérifient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) e^{-2\lambda t} dt - \lambda \int_0^T (v, v - u) e^{-2\lambda t} dt \\ & + \int_0^T \varphi(v) e^{-2\lambda t} dt - \int_0^T \varphi(u) e^{-2\lambda t} dt \\ & \geq \int_0^T (f, v - u) e^{-2\lambda t} dt - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2, \quad \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'. \end{aligned}$$

Avec cette notation, le problème (2.24) s'écrit dans une formulation faible

$$M_{u_0}^\lambda(u) + A u \ni f.$$

En modifiant insensiblement les démonstrations précédentes on établit les points suivants :

$M_{u_0}^\lambda$ est maximal monotone dans $V \times V'$ [muni du produit scalaire $\int_0^T (f, u) e^{-2\lambda t} dt$!]. Si $f \in M_{u_0}^\lambda(u)$, alors $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ et $u(0) = u_0$; de plus, pour tout $v \in D(\Phi)$ tel que $\frac{dv}{dt} \in V'$, la fonction $t \mapsto \|u(t) - v(t)\|^2$ est à variation bornée et on a l'inéquation « ponctuelle » :

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u - v\|^2 + \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) - \lambda (u, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)$$

au sens des mesures sur $]0, T[$.

D'autre part, si

$$f_1 \in M_{u_1(0)}^\lambda(u_1) \quad \text{et} \quad f_2 \in M_{u_2(0)}^\lambda(u_2),$$

alors on a

$$\frac{1}{2} \|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u_1(0) - u_2(0)\|^2 + \int_0^t e^{2\lambda(t-s)} (f_1 - f_2, u_1 - u_2) ds.$$

Soit $A : \overline{D(\Phi)} \rightarrow V'$ un opérateur pseudo-monotone (relativement au nouveau produit scalaire sur $V \times V'$!) et borné; supposons qu'il existe $v_0 \in D(\Phi)$ tel que $\frac{dv_0}{dt} \in V'$ et

$$\lim_{\substack{\|v\| \rightarrow +\infty \\ v \in D(\Phi)}} \frac{\int_0^T (A v, v - v_0) e^{-2\lambda t} dt + \int_0^T \varphi(v) e^{-2\lambda t} dt}{\|v\|} = +\infty.$$

Alors $M_{u_0}^\lambda + A$ est surjectif, etc.

REMARQUE II.6. — Soient $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \dots, \mathfrak{V}_k$, k espaces de Banach réflexifs tel que

$$\mathfrak{V}_i \subset \mathcal{H} \subset \mathfrak{V}'_i \quad (1 \leq i \leq k)$$

avec injections continues et denses.

Soient

$$2 \leq p_i < +\infty \quad (1 \leq i \leq k) \quad \text{et} \quad V = \bigcap_{i=1}^k L^{p_i}(0, T; \mathfrak{V}_i).$$

Soit φ_i ($1 \leq i \leq k$) une fonction convexe s. c. i. sur $\mathfrak{V}_i$; alors

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^k \int_0^T \varphi_i(u) dt$$

définit une fonction convexe s. c. i. sur V . Dans ces conditions les théorèmes II.2 et II.3 restent valables (les démonstrations étant à peu près inchangées) pourvu que l'on prenne

$$u_0 \in \bigcap_{i=1}^k \overline{\mathcal{H}}^{\mathfrak{V}_i} D(\varphi_i) .$$

REMARQUE II.7. — Lorsque $\mathfrak{V}$ n'est pas inclus dans $\mathcal{H}$ ou bien si $1 < p < 2$, on peut adapter les résultats des théorèmes II.2 et II.3 en choisissant

$$V = L^p(0, T; \mathfrak{V}) \cap L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

II.2.2. RAPPELS ET COMPLÉMENTS SUR LES SEMI-GROUPES NON LINÉAIRES.

— La théorie des semi-groupes non linéaires développée récemment par divers auteurs (*cf.* Komura [4], Kato [4], Crandall-Pazy [4], Browder [5], Brézis-Pazy [4], Brézis [4]) constitue un outil commode pour l'étude de la régularité de la solution des inéquations paraboliques. Rappelons d'abord l'un des principaux résultats de cette théorie.

Soit X un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual X' . Soit M un opérateur (éventuellement multivoque) m -accrétif de X dans X , de domaine $D(M)$, i. e. $R(I + \lambda M) = X$ et $(I + \lambda M)^{-1}$ est une contraction dans X pour tout $\lambda > 0$.

THÉORÈME II.4 (Kato [4]). — Soit $f \in C([0, T]; X)$ avec $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X)$. Soit $u_0 \in D(M)$ et soit $\sigma \in \mathbb{R}$. Alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; X)$ vérifiant :

$$(2.25) \quad u \text{ est dérivable à droite en tout } t \in [0, T[;$$

(2.26) u est lipschitzien; plus précisément :

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \leq e^{\sigma t} \| (Mu_0 - \sigma u_0 - f(0))^0 \|_X + \int_0^T e^{\sigma(t-s)} \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_X ds$$

et la fonction $t \mapsto e^{-\sigma t} \left\| \frac{d^+ u}{dt}(t) \right\|_X - \int_0^t e^{-\sigma s} \left\| \frac{df}{dt}(s) \right\|_X ds$ est décroissante;

(2.27) $u(t) \in D(M)$ pour tout $t \in [0, T]$;

(2.28) $\frac{d^+ u}{dt}(t) + (Mu(t) - \sigma u(t) - f(t))^0 = 0$ pour tout $t \in [0, T]$ ⁽¹⁷⁾;

(2.29) $u(0) = u_0$.

Soit F l'application de dualité de X dans X' , i. e. pour tout $u \in X$, $Fu \in X'$ est déterminé de manière unique par les relations

$$(Fu, u) = \|Fu\|_{X'}^2 = \|u\|_X^2.$$

Soit Y un espace de Banach réflexif, $Y \subset X$ avec injection continue.

On suppose que $D(M) \subset Y$ et que

$$(2.30) \quad \begin{cases} (g_1 - g_2, F(u_1 - u_2)) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|_Y^2, \\ \forall g_1 \in M u_1, \quad \forall g_2 \in M u_2 \quad \text{avec } \alpha > 0. \end{cases}$$

PROPOSITION II.1. — On fait les hypothèses du théorème II.4 ainsi que (2.30) ⁽¹⁸⁾. Alors la solution de (2.28)-(2.29) vérifie de plus :

$$(2.31) \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; Y).$$

Démonstration. — On a p. p. sur $]0, T - h[$,

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dt}(t+h) - \frac{du}{dt}(t) + Mu(t+h) - Mu(t) \\ - \sigma(u(t+h) - u(t)) \ni f(t+h) - f(t). \end{aligned}$$

Multipliant (2.32) par $F(u(t+h) - u(t))$ et intégrant sur $]0, T - h[$, il vient

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^{T-h} \|u(t+h) - u(t)\|_Y^2 dt &\leq \frac{1}{2} \|u(h) - u(0)\|_X^2 + \sigma \int_0^{T-h} \|u(t+h) - u(t)\|_X^2 dt \\ &\quad + \int_0^{T-h} \|f(t+h) - f(t)\|_X \|u(t+h) - u(t)\|_X dt. \end{aligned}$$

⁽¹⁷⁾ Étant donné un sous-ensemble convexe fermé C de X , on désigne par C^0 l'élément de norme minimale de C .

⁽¹⁸⁾ Il suffit en fait de supposer $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X) + L^2(0, T; Y)$.

Divisant par h^2 et passant à la limite quand $h \rightarrow 0$, on obtient $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; Y)$ avec

$$\alpha \int_0^T \left\| \frac{du}{dt} \right\|_Y^2 dt \leq \frac{1}{2} \| (M u_0 - \sigma u_0 - f(0))^0 \|_X^2 + \sigma \int_0^T \left\| \frac{du}{dt} \right\|_X^2 dt + \int_0^T \left\| \frac{df}{dt} \right\|_X \left\| \frac{du}{dt} \right\|_X dt.$$

Dans le cas particulier où M est le « gradient » d'une fonction convexe sur un espace de Hilbert le semi-groupe engendré par $-M$ jouit de propriétés « régularisantes » comparables en un certain sens à celles des semi-groupes linéaires analytiques (cf. Brézis [4]). Le problème (2.28)-(2.29) admet alors une solution « forte » même si l'on fait peu d'hypothèses sur la régularité de f et u_0 . Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit φ une fonction convexe s. c. i. de $\mathcal{H}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$. On pose

$$\begin{aligned} D(\varphi) &= \{ u \in \mathcal{H}; \varphi(u) < +\infty \}, \\ Mu = \partial\varphi(u) &= \{ f \in \mathcal{H}; \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u), \forall v \in \mathcal{H} \}, \\ D(M) &= \{ u \in D(\varphi); Mu \neq \emptyset \}, \end{aligned}$$

M est maximal monotone dans $\mathcal{H}$ et on a $\overline{D(M)} = \overline{D(\varphi)}$.

THÉORÈME II.5. — Soient $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $u_0 \in \overline{D(\varphi)}$. Soit $\sigma \geq 0$. Alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ vérifiant :

(2.33) u est dérivable p. p. sur $]0, T[$;

$$(2.24) \quad \frac{du}{dt} \in L^2(\delta, T; \mathcal{H}), \quad \forall \delta \in]0, T[;$$

$$(2.35) \quad u(t) \in D(M) \quad \text{p. p. sur }]0, T[;$$

(2.36) la fonction $t \mapsto \varphi(u(t))$ appartient à $L^1(0, T)$ et elle est continue sur $]0, T[$; plus précisément la fonction $t \mapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur $[\delta, T]$, $\forall \delta \in]0, T[$ et on a

$$\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + \frac{d}{dt} \varphi(u) = \left(f + \sigma u, \frac{du}{dt} \right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[;$$

$$(2.37) \quad \frac{du}{dt} + (Mu - \sigma u - f)^0 = 0 \quad \text{p. p. sur }]0, T[;$$

$$(2.38) \quad u(0) = u_0.$$

De plus, on a

$$\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H}) \quad \text{et} \quad \varphi(u) \in C([0, T]; \mathcal{H}) \quad \text{si} \quad u_0 \in D(\varphi).$$

REMARQUE II.8. — Supposons que $\text{Min}_{\mathcal{H}} \varphi = 0$ et soit $v_0 \in \mathcal{H}$ tel que $\varphi(v_0) = 0$. Alors la solution de (2.37)-(2.38) vérifie

$$(2.39) \quad \left(\int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} \leq (2 + \sigma T) \left(\int_0^T |f + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} \\ + \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \sigma \sqrt{T} \right) |u_0 - v_0|, \quad \forall \delta \in]0, T[.$$

Si $u_0 \in D(\varphi)$, on a

$$(2.40) \quad \left(\int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} \\ \leq (1 + \sigma T) \left(\int_0^T |f + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} + \sigma \sqrt{T} |u_0 - v_0| + \sqrt{\varphi(u_0)}.$$

Démonstration du théorème II.5. — Ce résultat est prouvé dans Brézis [4] pour le cas où $\sigma = 0$. La démonstration du cas général en diffère peu et nous indiquons seulement comment établir formellement (2.39). Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que $\text{Min}_{\mathcal{H}} \varphi = 0$ et soit $v_0 \in \mathcal{H}$ tel que $\varphi(v_0) = 0$.

Première estimation. — On a

$$(2.41) \quad \varphi(v_0) - \varphi(u(t)) \geq \left(f(t) - \frac{du}{dt}(t) + \sigma u(t), v_0 - u(t) \right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Multipliant (2.41) par $e^{-2\sigma t}$ et intégrant sur $]0, T[$, il vient

$$\int_0^T \varphi(u(t)) e^{-2\sigma t} dt \leq \int_0^T |f(t) + \sigma v_0| |u(t) - v_0| e^{-2\sigma t} dt + \frac{1}{2} |u_0 - v_0|^2.$$

Par ailleurs, retranchant de (2.37) l'équation $\frac{dv_0}{dt} + M v_0 - \sigma v_0 \ni -\sigma v_0$, on obtient

$$(2.42) \quad |u(t) - v_0| \leq e^{\sigma t} |u_0 - v_0| + \int_0^t e^{\sigma(t-s)} |f(s) + \sigma v_0| ds,$$

d'où

$$(2.43) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(u(t)) e^{-2\sigma t} dt \leq \int_0^T |f(t) + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma t} dt + \frac{1}{T} |u_0 - v_0|^2.$$

Fixant $\delta \in]0, T]$ et appliquant (2.43) (avec $T = \delta$) ainsi que le théorème de la moyenne on voit qu'il existe $t_0 \in [0, \delta]$ tel que

$$\varphi(u(t_0)) e^{-2\sigma t_0} \leq \int_0^\delta |f(t) + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma t} dt + \frac{1}{\delta} |u_0 - v_0|^2.$$

Seconde estimation. — On multiplie (2.37) par $e^{-2\sigma t} \frac{du}{dt}$ et on intègre sur $]t_0, T[$ ce qui conduit à

$$\int_{t_0}^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 e^{-2\sigma t} dt + \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \varphi(u) e^{-2\sigma t} dt \leq \int_{t_0}^T |f + \sigma u| \left| \frac{du}{dt} \right| e^{-2\sigma t} dt.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \varphi(u) e^{-2\sigma t} dt &= \varphi(u(T)) e^{-2\sigma T} - \varphi(u(t_0)) e^{-2\sigma t_0} \\ &\quad + 2\sigma \int_{t_0}^T \varphi(u) e^{-2\sigma t} dt \geq -\varphi(u(t_0)) e^{-2\sigma t_0}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a, grâce à (2.42) :

$$\begin{aligned} |f(t) + \sigma u(t)| &\leq |f(t) + \sigma v_0| + \sigma |u(t) - v_0| \\ &\leq |f(t) + \sigma v_0| + \sigma e^{\sigma t} |u_0 - v_0| + \sigma e^{\sigma t} \int_0^t |f(s) + \sigma v_0| e^{-\sigma s} ds \\ &\leq |f(t) + \sigma v_0| + \sigma e^{\sigma t} |u_0 - v_0| + \sigma e^{\sigma t} \sqrt{t} \left(\int_0^t |f(s) + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma s} ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\left(\int_{t_0}^T |f(t) + \sigma u(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{t_0}^T |f(t) + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} + \sigma \sqrt{T - t_0} |u_0 - v_0| + \sigma T \left(\int_0^T |f(t) + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} \\ &\leq (1 + \sigma T) \left(\int_0^T |f(t) + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} + \sigma \sqrt{T - t_0} |u_0 - v_0|. \end{aligned}$$

Mais

$$\left(\int_{t_0}^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_{t_0}^T |f(t) + \sigma u(t)|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} + \sqrt{\varphi(u(t_0))} e^{-\sigma t_0}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (2.44) \quad &\left(\int_{t_0}^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} \\ &\leq (1 + \sigma T) \left(\int_{t_0}^T |f(t) + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} + \sigma \sqrt{T - t_0} |u_0 - v_0| + \sqrt{\varphi(u(t_0))} e^{-\sigma t_0}. \end{aligned}$$

Enfin, utilisant la première estimation, il vient

$$\begin{aligned} &\left(\int_{t_0}^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} \\ &\leq (2 + \sigma T) \left(\int_0^T |f(t) + \sigma v_0|^2 e^{-2\sigma t} dt \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + \sigma \sqrt{T} \right) |u_0 - v_0|. \end{aligned}$$

Supposant f plus régulière, on établit des propriétés supplémentaires pour u .

THÉORÈME II.6. — On suppose que $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ avec $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; \mathcal{H})$ et que $u_0 \in \overline{D(\varphi)}$. Alors la solution u de (2.37)-(2.38) vérifie de plus :

(2.45) u est dérivable à droite en tout $t \in]0, T[$;

$$(2.46) \quad \frac{du}{dt} \in L^\infty(\delta, T; \mathcal{H}), \quad \forall \delta \in]0, T[;$$

$$(2.47) \quad u(t) \in D(M), \quad \forall t \in]0, T[;$$

$$(2.48) \quad \frac{d^+ u}{dt}(t) + (Mu(t) - \sigma u(t) - f(t))^0 = 0, \quad \forall t \in [0, T[;$$

(2.49) $\varphi(u)$ est dérivable à droite en tout $t \in]0, T[$ et

$$\left| \frac{d^+ u}{dt}(t) \right|^2 + \frac{d^+}{dt} \varphi(u(t)) = \left(f(t) + \sigma u(t), \frac{d^+ u}{dt}(t) \right), \quad \forall t \in]0, T[.$$

REMARQUE II.9. — Supposons que $\min_{\mathcal{H}} \varphi = 0$ et soit $v_0 \in \mathcal{H}$ tel que $\varphi(v_0) = 0$. Sous les hypothèses du théorème II.6 la solution u de (2.37)-(2.38) vérifie

$$(2.50) \quad e^{-\sigma t} \left| \frac{d^+ u}{dt}(t) \right| \leq \int_0^t e^{-\sigma s} \left| \frac{df}{dt}(s) \right| ds + (1 + \varepsilon + \sigma t) \sup_{[0, t]} e^{-\sigma s} |f(s) + \sigma v_0| \\ + \left(\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon t} + \sigma \right) |u_0 - v_0|, \quad \forall t \in]0, T[, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Si $u_0 \in D(\varphi)$, on a

$$(2.51) \quad e^{-\sigma t} \left| \frac{d^+ u}{dt}(t) \right| \leq \int_0^t e^{-\sigma s} \left| \frac{df}{dt}(s) \right| ds + (1 + \sigma t) \sup_{(0, t)} e^{-\sigma s} |f(s) + \sigma v_0| \\ + \sigma |u_0 - v_0| + \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{\varphi(u_0)}, \quad \forall t \in]0, T[.$$

Démonstration. — Le théorème II.6 résulte de Brézis [4] (proposition 6). En effet, l'équation (2.37) s'écrit :

$$\frac{du}{dt} + Mu \ni g \quad \text{p. p. sur }]\delta, T[, \quad u(\delta) \in \overline{D(\varphi)},$$

avec

$$\frac{dg}{dt} = \frac{df}{dt} + \sigma \frac{du}{dt} \in L^1(\delta, T; \mathcal{H}) \quad (\text{grâce au théorème II.5}).$$

Les estimations (2.50) et (2.51) s'obtiennent de la même manière que (36) dans Brézis [4].

II.2.3. RÉGULARITÉ EN t . — Revenons au cadre du paragraphe II.2.1. Soient $\mathcal{H}$ un Hilbert et $\mathcal{V}$ un Banach réflexif tels que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'.$$

Soit φ une fonction convexe s. e. i. de $\mathcal{V}$ dans $] -\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$. Soit A un opérateur monotone hémicontinu de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$ tel que

$$(2.52) \quad \lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{(A u, u - v_0) + \varphi(u)}{\|u\|} = +\infty, \quad \text{avec } v_0 \in D(\varphi).$$

THÉORÈME II.7. — Soit $f \in C([0, T]; \mathcal{H})$ avec $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; \mathcal{H})$. Soit $u_0 \in D(\varphi)$ tel qu'il existe $g_0 \in \mathcal{H}$ satisfaisant

$$(2.53) \quad (A u_0, v - u_0) + \varphi(v) - \varphi(u_0) \geq (g_0, v - u_0), \quad \forall v \in D(\varphi);$$

Soit $\sigma \in \mathbf{R}$, alors il existe une fonction $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ unique vérifiant :

$$(2.54) \quad u \text{ est dérivable à droite dans } \mathcal{H} \text{ en tout } t \in [0, T[;$$

$$(2.55) \quad u \text{ est lipschitzien dans } \mathcal{H} \text{ et plus précisément :}$$

$$\left| \frac{du}{dt}(t) \right| \leq e^{\sigma t} |g_0 - \sigma u_0 - f(0)| + \int_0^t e^{\sigma(t-s)} \left| \frac{df}{ds}(s) \right| ds;$$

la fonction $t \mapsto \left| \frac{d^+ u}{dt}(t) \right| e^{-\sigma t} - \int_0^t e^{-\sigma s} \left| \frac{df}{ds}(s) \right| ds$ est décroissante;

$$(2.56) \quad u \in C([0, T]; \mathcal{V}_f)^{(19)}, \quad u(t) \in D(\varphi), \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{et} \quad \varphi(u) \in C([0, T]);$$

$$(2.57) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^+ u}{dt}(t) + A u(t) - \sigma u(t), v - u(t) \right) + \varphi(v) - \varphi(u(t)) &\geq (f(t), v - u(t)), \\ \forall t \in [0, T], \quad \forall v \in D(\varphi); \end{aligned} \right.$$

$$(2.58) \quad u(0) = u_0.$$

Démonstration. — On applique le théorème II.4 avec $X = \mathcal{H}$ et $M u = (A u + \partial \varphi(u)) \cap \mathcal{H}$. Autrement dit, $g \in M u$ si et seulement si $g \in \mathcal{H}$ et $u \in D(\varphi)$ vérifient

$$(A u, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (g, v - u), \quad \forall v \in D(\varphi).$$

Il résulte de l'hypothèse (2.52) que M est maximal monotone dans $\mathcal{H}$. En effet, il suffit de montrer que $R(I + \lambda M) = \mathcal{H}$ pour tout $\lambda > 0$;

⁽¹⁹⁾ $C([0, T]; \mathcal{V}_f)$ désigne l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathcal{V}$ muni de la topologie faible.

or pour tout $g \in \mathcal{H}$ il existe u (grâce au théorème II.1, par exemple) vérifiant :

$$(u + \lambda A u, v - u) + \lambda \varphi(v) - \lambda \varphi(u) \geq (g, v - u), \quad \forall v \in D(\varphi).$$

L'hypothèse (2.53) affirme que $u_0 \in D(M)$ et le théorème II.4 montre alors qu'il existe u vérifiant (2.54), (2.55), (2.57) et (2.58). D'autre part, $u(t) \in D(M)$ pour tout $t \in [0, T]$ et donc en particulier $u(t) \in D(\varphi)$ pour tout $t \in [0, T]$. Par ailleurs :

$$(A u(t), u(t) - v_0) + \varphi(u(t)) \leq \varphi(v_0) + \left| f(t) + \sigma u(t) - \frac{d^+ u}{dt}(t) \right| |u(t) - v_0|,$$

$$\forall t \in [0, T].$$

Il en résulte grâce à l'hypothèse (2.52) que $\|u(t)\|$ est borné. On en déduit que $u \in C([0, T]; \mathcal{V}_f)$ puisque $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$. Enfin soient $t_0 \in [0, T]$ et $h \in \mathbf{R}$ destiné à tendre vers zéro ($h > 0$ si $t_0 = 0$ et $h < 0$ si $t_0 = T$).

Prenant $t = t_0 + h$ et $v = u(t_0)$ dans (2.57), on a

$$\begin{aligned} \varphi(u(t_0 + h)) &\leq \varphi(u(t_0)) + (A u(t_0 + h), u(t_0) - u(t_0 + h)) \\ &\quad + \left| f(t_0 + h) + \sigma u(t_0 + h) - \frac{d^+ u}{dt}(t_0 + h) \right| |u(t_0 + h) - u(t_0)| \\ &\leq \varphi(u(t_0)) + (A u(t_0), u(t_0) - u(t_0 + h)) + C |u(t_0 + h) - u(t_0)|. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\varphi(u(t_0)) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \varphi(u(t_0 + h)) \leq \limsup_{h \rightarrow 0} \varphi(u(t_0 + h)) \leq \varphi(u(t_0)).$$

Donc $\varphi(u)$ est continu sur $[0, T]$.

REMARQUE II.10. — En général la solution de (2.57)-(2.58) n'appartient pas à $C^1([0, T]; \mathcal{H})$ même si f est très régulière. En effet, considérons l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \mathcal{H} = \mathcal{V}' = \mathbf{R}, \quad A u = u, \quad \sigma = 0, \quad u_0 = 0; \\ f(t) = e^{-t}(t - 3t^2) \quad \text{et} \quad \varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \geq 0, \\ +\infty & \text{si } r < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier que la solution correspondante est donnée par

$$u(t) = \begin{cases} e^{-t} t^2 \left(\frac{1}{2} - t \right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

PROPOSITION II.2. — On fait les hypothèses du théorème II.7 ainsi que

$$(2.59) \quad (A u_1 - A u_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^2, \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{V}; \quad \alpha > 0.$$

Alors la solution u de (2.57)-(2.58) vérifie

$$(2.60) \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{V});$$

$$(2.61) \quad \varphi(u) \text{ est dérivable p. p. sur }]0, T[\text{ avec } \frac{d\varphi}{dt} \in L^2(0, T) \text{ et}$$

$$\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + \left(A u, \frac{du}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \varphi(u) = \left(f, \frac{du}{dt} \right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Démonstration. — On applique la proposition II.1 avec $Y = \mathcal{V}$. Il est clair que si $g_1 \in M u_1$, $g_2 \in M u_2$, on a $(g_1 - g_2, u_1 - u_2) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|^2$; d'où (2.60).

$\|A u(t)\|$ est borné puisque $u \in C([0, T]; \mathcal{V})$ et A est continu de $\mathcal{V}$ fort dans $\mathcal{V}'$ faible. On déduit alors de (2.57) que

$$\|\varphi(u(t+h)) - \varphi(u(t))\| \leq C \|u(t+h) - u(t)\|,$$

où C est indépendant de t et h . Il en résulte que $\frac{d\varphi}{dt} \in L^2(0, T)$. Enfin soit t_0 un point où φ est dérivable ainsi que u (dans $\mathcal{V}$); prenant $v = u(t_0 \pm h)$, $h > 0$, dans (2.57), on obtient (2.61) après division par h et passage à la limite quand $h \rightarrow 0$.

Le théorème II.7 peut être généralisé en vue d'obtenir des théorèmes de régularité dans les espaces L^p . Soit X un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual; $X \subset \mathcal{H}$ avec injection continue. On suppose que $\forall g_1, g_2 \in X$ et $\forall \lambda > 0$ les solutions respectives u_1, u_2 des inéquations

$$(u_i + \lambda A u_i, v - u_i) + \lambda [\varphi(v) - \varphi(u_i)] \geq (g_i, v - u_i), \quad \forall v \in D(\varphi) \quad (i = 1, 2)$$

appartiennent à X et vérifient

$$(2.62) \quad \|u_1 - u_2\|_X \leq \|g_1 - g_2\|_X.$$

PROPOSITION II.3. — On fait les hypothèses (2.52) et (2.62). Soit $f \in C([0, T]; X)$ avec $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X)$; soit $u_0 \in X \cap D(\varphi)$ tel qu'il existe $g_0 \in X$ satisfaisant

$$(A u_0, v - u_0) + \varphi(v) - \varphi(u_0) \geq (g_0, v - u_0), \quad \forall v \in D(\varphi).$$

Alors la solution de (2.57)-(2.58) vérifie :

(2.63) u est dérivable à droite dans X en tout $t \in [0, T[$;

(2.64) u est lipschitzien dans X et plus précisément :

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \leq e^{\sigma t} \|g_0 - \sigma u_0 - f(0)\|_X + \int_0^t e^{\sigma(t-s)} \left\| \frac{df}{ds}(s) \right\|_X ds;$$

la fonction $t \mapsto \left\| \frac{d^+ u}{dt}(t) \right\|_X e^{-\sigma t} - \int_0^t e^{-\sigma s} \left\| \frac{df}{ds}(s) \right\|_X ds$ est décroissante.

Démonstration. — On applique le théorème II.4; l'hypothèse (2.62) assure que l'opérateur M défini dans $X \times X$ par

$$\begin{aligned} &\llcorner g \in M u \text{ si et seulement si } g \in X \text{ et } u \in X \cap D(\varphi) \text{ vérifient} \\ &(\Lambda u, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (g, v - u), \forall v \in D(\varphi) \llcorner \end{aligned}$$

est m -accrétif dans X .

On peut établir d'autres résultats de régularité pour la solution u de (2.57)-(2.58) avec moins d'hypothèses sur f et u_0 (en particulier f n'est pas supposé dérivable par rapport à t , et u_0 ne vérifie pas nécessairement (2.53)). Nous nous placerons dans l'un des cadres suivants :

(A) L'opérateur Λ est le « gradient » d'une fonction convexe s. c. i. sur $\mathfrak{V}$ que l'on peut alors englober dans φ .

(B) φ est la fonction indicatrice $\Psi_{\mathcal{H}}$ d'un convexe fermé $\mathcal{H}$ de $\mathfrak{V}$ et $(I + \lambda \Lambda)^{-1} \mathcal{H} \subset \mathcal{H}$, $\forall \lambda > 0$.

CADRE A. — On se donne seulement une fonction φ convexe s. c. i. de $\mathfrak{V}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$ et on suppose

$$(2.65) \quad \lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u)}{\|u\|} = +\infty.$$

La fonction $\varphi_{\mathcal{H}}$ définie sur $\mathcal{H}$ par

$$\varphi_{\mathcal{H}}(u) = \begin{cases} \varphi(u) & \text{si } u \in D(\varphi), \\ +\infty & \text{si } u \in \mathcal{H}, u \notin D(\varphi) \end{cases}$$

est convexe et s. c. i. sur $\mathcal{H}$. En effet, pour $\lambda < +\infty$, l'ensemble $E = \{u \in \mathcal{H}; \varphi(u) \leq \lambda\}$ est convexe fermé dans $\mathfrak{V}$ et il est borné dans $\mathfrak{V}$ grâce à (2.65); il est donc faiblement compact dans $\mathfrak{V}$ et par suite dans $\mathcal{H}$. En particulier E est fermé dans $\mathcal{H}$. L'opérateur

$$M u = \partial \varphi_{\mathcal{H}}(u) = \{f \in \mathcal{H}; \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u), \forall v \in \mathcal{H}\}$$

est maximal monotone dans $\mathcal{H}$. On a évidemment $D(M) \subset D(\varphi_{\mathcal{H}}) = D(\varphi)$ et par ailleurs (cf. Brézis [4], Remarque 4), on a $\overline{D(M)}^{\mathcal{H}} = \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$. Grâce à l'hypothèse (2.65), φ atteint son minimum et pour simplifier on suppose que $\min \varphi = 0$.

THÉORÈME II.8. — Soient $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$; alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ vérifiant :

(2.66) u est dérivable dans $\mathcal{H}$ p. p. sur $]0, T[$ et $\frac{du}{dt} \in L^2(\delta, T; \mathcal{H})$, $\forall \delta \in]0, T[$, avec

$$\left(\int_{\delta}^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq 2 \left(\int_0^T |f|^2 dt \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\delta}} |u_0 - v_0|, \quad \forall v_0 \text{ tel que } \varphi(v_0) = 0;$$

(2.67) $u \in C([0, T]; \mathcal{V}_f)$ et $\varphi(u) \in L^1(0, T) \cap C([0, T])$; plus précisément $\varphi(u)$ est absolument continu sur $[\delta, T]$, $\forall \delta \in]0, T[$ et on a

$$\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + \frac{d}{dt} \varphi(u) = \left(f, \frac{du}{dt} \right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[;$$

(2.68) $\left(\frac{du}{dt}, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi)$

et plus précisément :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + (Mu - f)^0 &= 0 \quad \text{p. p. sur }]0, T[; \\ (2.69) \quad u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Si de plus $u_0 \in D(\varphi)$, on a $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ avec

$$(2.70) \quad \left(\int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^T |f|^2 dt \right)^{1/2} + \sqrt{\varphi(u_0)},$$

$$(2.71) \quad u \in C([0, T]; \mathcal{V}_f).$$

Par ailleurs si $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; \mathcal{H})$, alors on a

(2.72) u est dérivable à droite en tout $t \in]0, T[$;

$$(2.73) \quad \frac{du}{dt} \in L^\infty(\delta, T; \mathcal{H}), \quad \forall \delta \in]0, T[$$

avec

$$\left| \frac{d^+ u}{dt}(t) \right| \leq \int_0^t \left| \frac{df}{dt}(s) \right| ds + (1 + \varepsilon) \sup_{[0, t]} |f| + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \frac{|u_0 - v_0|}{t},$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall t \in]0, T[, \quad \forall v_0 \text{ tel que } \varphi(v_0) = 0;$$

(2.74) $\left(\frac{d^+ u}{dt}, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u), \quad \forall t \in]0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi)$

et plus précisément :

$$\frac{d^+ u}{dt} + (Mu - f)^0 = 0, \quad \forall t \in]0, T[.$$

Démonstration. — On applique les théorèmes II.5 et II.6 (avec $\varphi = \varphi_{\mathcal{H}}$). Comme $\varphi(u(t))$ est borné pour $t \in [\delta, T]$, $\|u(t)\|$ est borné pour $t \in [\delta, T]$ grâce à (2.65) et par conséquent $u \in C([\delta, T]; \mathcal{V}_f)$.

REMARQUE II.11. — Le problème (2.66)-(2.69) est équivalent à

$$(2.75) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \int_0^T \varphi(v) dt - \int_0^T \varphi(u) dt \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} |v(0) - u_0|^2, \\ \forall v \in L^2(0, T; \mathcal{H}); \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H}) \text{ et } \varphi(v) \in L^1(0, T). \end{array} \right.$$

En effet, on a d'après (2.68) :

$$(2.76) \quad \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |v - u|^2.$$

Intégrant (2.76) sur $[\delta, T]$, $\delta > 0$, il vient

$$\int_{\delta}^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \int_{\delta}^T \varphi(v) dt - \int_{\delta}^T \varphi(u) dt \geq \int_{\delta}^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} |v(\delta) - u(\delta)|^2.$$

Passant à la limite quand $\delta \rightarrow 0$ on obtient (2.75). La réciproque est immédiate grâce à l'unicité de la solution de (2.75) (appliquer le théorème II.3 avec $\mathcal{V} = \mathcal{H}$ et $\varphi = \varphi_{\mathcal{H}}$).

REMARQUE II.12. — L'équation (2.68) s'écrit aussi

$$\frac{du}{dt} + \text{Proj}_{Mu} f - f = 0 \quad \text{p. p. sur }]0, T[\quad (20).$$

Par ailleurs, soit $E(Mu(t))$ l'espace affine fermé engendré par $Mu(t)$ dans $\mathcal{H}$, alors on a

$$\frac{du}{dt}(t) + (E(Mu(t)) - f(t))^0 = 0 \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

autrement dit :

$$\frac{du}{dt} + \text{Proj}_{E(Mu)} f - f = 0 \quad \text{p. p. sur }]0, T[$$

(cf. Brézis [4], Remarque 7).

(20) Proj_C désigne la projection sur C dans $\mathcal{H}$.

APPLICATION. — On suppose que $\mathfrak{V}$ est un espace de Hilbert; soit A un opérateur linéaire continu de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}'$ tel que $\overline{A^*} = A$ et $(A v, v) \geq \alpha \|v\|^2$, $\forall v \in \mathfrak{V}$ avec $\alpha > 0$. Soit φ_0 une fonction convexe s. c. i. de $\mathfrak{V}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi_0 \not\equiv +\infty$.

COROLLAIRE II.2. — Soient $f \in L^2(0, T; \mathfrak{H})$ et $u_0 \in \overline{D(\varphi_0)}^{\mathfrak{H}}$. Il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; \mathfrak{H})$ vérifiant

$$(2.77) \quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dt}, v - u \right) + (A u, v - u) + \varphi_0(v) - \varphi_0(u) \\ \geq (f, v - u) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi_0); \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

avec $u \in L^2(0, T; \mathfrak{V}) \cap C([\delta, T]; \mathfrak{V})$, $\frac{du}{dt} \in L^2(\delta, T; \mathfrak{H})$, $\forall \delta \in]0, T[$ et

$$\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (A u, u) + \varphi_0(u) \right] = \left(f, \frac{du}{dt} \right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Suivant les hypothèses faites sur f ou u_0 , u vérifie des propriétés supplémentaires.

Hypothèses	Conclusions
$u_0 \in D(\varphi_0)$	$u \in C([0, T]; \mathfrak{V})$, $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathfrak{H})$
$\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; \mathfrak{H})$	$\frac{du}{dt} \in L^\infty(\delta, T; \mathfrak{H}) \cap L^2(\delta, T; \mathfrak{V})$, $\forall \delta \in]0, T[$ u est dérivable à droite en tout $t > 0$ et (2.77) est vérifié, $\forall t \in]0, T[$ avec $\frac{d^+ u}{dt}$ au lieu de $\frac{du}{dt}$
$\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; \mathfrak{H})$ $u_0 \in D(M)$	$\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; \mathfrak{H}) \cap L^2(0, T; \mathfrak{V})$

Démonstration. — On applique le théorème II.8 avec

$$\varphi(u) = \frac{1}{2} (A u, u) + \varphi_0(u)$$

qui est une fonction convexe s. c. i. sur $\mathfrak{V}$ vérifiant (2.65). Il est immédiat que

$$\begin{aligned} M u &= \partial_{\varphi_{\mathfrak{H}}}(u) = (A u + \partial \varphi_0(u)) \cap \mathfrak{H} \\ &= \{ f \in \mathfrak{H}; (A u, v - u) + \varphi_0(v) - \varphi_0(u) \geq (f, v - u), \forall v \in D(\varphi_0) \}. \end{aligned}$$

Montrons que $u \in L^2(0, T; \mathfrak{V}) \cap C([\delta, T]; \mathfrak{V})$. La fonction

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(A u, u) + \varphi_0(u)$$

appartient à $L^1(0, T)$ et donc $u \in L^2(0, T; \mathfrak{V})$. D'autre part, $\varphi(u) \in C([\delta, T])$, ce qui implique $(A u, u) \in C([\delta, T])$. En effet :

$$\frac{1}{2}(A u(t+h), u(t+h)) = \varphi(u(t+h)) - \varphi_0(u(t+h))$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A u(t), u(t)) &\leq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}(A u(t+h), u(t+h)) \\ &\leq \limsup_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}(A u(t+h), u(t+h)) \\ &\leq \varphi(u(t)) - \liminf_{h \rightarrow 0} \varphi_0(u(t+h)) \\ &\leq \varphi(u(t)) - \varphi_0(u(t)) = \frac{1}{2}(A u(t), u(t)). \end{aligned}$$

Combinant les propriétés $u \in C([\delta, T]; \mathfrak{V}_f)$ et $(A u, u) \in C([\delta, T])$ on obtient $u \in C([\delta, T]; \mathfrak{V})$.

REMARQUE II.13. — Soit $u \in L^2(0, T; \mathfrak{V})$ tel que $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathfrak{H})$ et vérifiant

$$(A u, v - u) + \varphi_0(v) - \varphi_0(u) \geq (g, v - u) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi_0),$$

avec $g \in L^2(0, T; \mathfrak{H})$.

Alors $u \in C([0, T]; \mathfrak{V})$ et

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(A u, u) + \varphi_0(u) \right] = \left(g, \frac{du}{dt} \right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[$$

[cf. Brézis [4], lemme 6, appliqué avec $\varphi(u) = \frac{1}{2}(A u, u) + \varphi_0(u)$].

REMARQUE II.14. — On fait les hypothèses du corollaire II.2; on suppose de plus que $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; \mathfrak{H})$ et que φ_0 est la fonction indicatrice d'un cône de sommet $\theta \in \mathfrak{V}$. Alors on a

$$\left(\frac{du}{dt} + A u, \theta - u \right) = (f, \theta - u) \quad \text{p. p. sur }]0, T[;$$

donc en particulier, la fonction $t \mapsto \frac{d}{dt} |u(t) - \theta|^2$ est absolument continue sur $[\delta, T]$ et on a

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} |u - \theta|^2 = \frac{d}{dt} (A u - f, \theta - u).$$

Indiquons enfin que le théorème II.8 s'étend à certaines équations dont le second membre f est à valeurs dans $\mathcal{V}'$.

PROPOSITION II.4. — On fait l'hypothèse (2.65). Soit $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $f_2 \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$; $\frac{df_2}{dt} \in L^1(0, T; \mathcal{V}')$. Soit $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$. Alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ vérifiant

$$(2.78) \quad \frac{du}{dt} \in L^2(\delta, T; \mathcal{H}), \quad \forall \delta \in]0, T[$$

$$(2.79) \quad u \in C([0, T]; \mathcal{V}_f) \quad \text{et} \quad \varphi(u) - (f_2, u) \in L^1(0, T);$$

plus précisément $\varphi(u) - (f_2, u)$ est absolument continu sur $[\delta, T]$, $\forall \delta \in]0, T[$ et on a

$$\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + \frac{d}{dt} [\varphi(u) - (f_2, u)] = \left(f_1, \frac{du}{dt} \right) - \left(\frac{df_2}{dt}, u \right) \quad p.p. \text{ sur }]0, T[;$$

$$(2.80) \quad \left(\frac{du}{dt}, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u) \quad p.p. \text{ sur }]0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi);$$

$$(2.81) \quad u(0) = u_0.$$

De plus, si $u_0 \in D(\varphi)$, alors $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $u \in C([0, T]; \mathcal{V}_f)$.

Démonstration. — Nous esquissons formellement la méthode permettant d'établir les estimations principales (ces résultats peuvent être justifiés par exemple en régularisant u_0 et f). Pour tout $r > 0$, on pose

$$\omega(r) = \inf_{v \in \mathcal{V}} \{ \varphi(v) - r \|v\| \}.$$

Il est immédiat que $\omega(r) < +\infty$, $\forall r$.

Première estimation. — Soit $\tilde{u}$ la solution de l'équation

$$(2.82) \quad \frac{d\tilde{u}}{dt} + M \tilde{u} \ni f_2, \quad \tilde{u}(0) = u_0.$$

Retranchant (2.82) de (2.80), il vient après multiplication par $u - \tilde{u}$,

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \int_0^t |f_1| ds \leq \sqrt{t} \left(\int_0^t |f_1|^2 ds \right)^{1/2}.$$

D'autre part, soit $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $\varphi(v_0) = 0$; on a

$$\varphi(v_0) - \varphi(\tilde{u}(t)) \geq \left(f_2(t) - \frac{d\tilde{u}}{dt}(t), v_0 - \tilde{u}(t) \right)$$

et donc

$$\varphi(\tilde{u}(t)) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}(t) - v_0\|^2 \leq (f_2(t), \tilde{u}(t) - v_0) \leq \|f_2\|_\infty (\|\tilde{u}(t)\| + \|v_0\|) \quad (21).$$

Par suite :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u} - v_0\|^2 \leq \omega(\|f_2\|_\infty) + \|f_2\|_\infty \|v_0\| = \frac{C_1^2}{2}.$$

D'où

$$\|\tilde{u}(t) - v_0\| \leq C_1 \sqrt{t} + \|u_0 - v_0\|.$$

Enfin

$$(2.83) \quad \|u(t) - v_0\| \leq C_2 \sqrt{t} + \|u_0 - v_0\|, \quad \text{avec} \quad C_2 = C_1 + \left(\int_0^T |f_1|^2 dt \right)^{1/2}.$$

On a

$$\varphi(v_0) - \varphi(u) \geq \left(f_1 + f_2 - \frac{du}{dt}, v_0 - u \right)$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} (2.84) \quad & \frac{1}{T} \int_0^T [\varphi(u) - (f_2, u)] dt \\ & \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f_1| \cdot \|u - v_0\| dt + \|f_2\|_\infty \|v_0\| + \frac{1}{2T} \|u_0 - v_0\|^2 \\ & \leq C_3 + \frac{1}{T} \|u_0 - v_0\|^2, \end{aligned}$$

où

$$C_3 = \frac{C_2}{\sqrt{2}} \left(\int_0^T |f_1|^2 dt \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \int_0^T |f_1|^2 dt + \|f_2\|_\infty \|v_0\|.$$

Seconde estimation. — Multipliant l'équation $\frac{du}{dt} + M u \ni f$ par $\frac{du}{dt}$ et intégrant sur $]0, T[$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt + \varphi(u(T)) &= \int_0^T \left(f_1, \frac{du}{dt} \right) dt + (f_2(T), u(T)) - (f_2(0), u(0)) \\ &\quad - \int_0^T \left(\frac{df_2}{dt}, u \right) dt + \varphi(u(0)). \end{aligned}$$

(21) $\|f_2\|_\infty = \sup_{t \in [0, T]} \|f_2(t)\|_{\mathcal{V}'}.$

Donc

$$(2.85) \quad \frac{1}{2} \int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt + \varphi(u(T)) - (f_2(T), u(T)) \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^T |f_1|^2 dt - \int_0^T \left(\frac{df_2}{dt}, u \right) dt + \varphi(u(0)) - (f_2(0), u(0)).$$

Soit $\delta \in]0, T[$ fixé; appliquant la première estimation sur $[0, \delta]$, on voit qu'il existe $t_0 \in [0, \delta]$ tel que

$$\varphi(u(t_0)) - (f_2(t_0), u(t_0)) \leq C_3 + \frac{1}{\delta} |u_0 - v_0|^2.$$

Appliquant (2.85) sur $[t_0, t]$ au lieu de $[0, T]$ on a, pour $t \geq t_0$,

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left| \frac{du}{dt} \right|^2 ds + \varphi(u(t)) - (f_2(t), u(t)) \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^T |f_1|^2 dt + \int_{t_0}^t \left\| \frac{df_2}{dt} \right\| \|u\| ds + C_3 + \frac{1}{\delta} |u_0 - v_0|^2.$$

D'où l'on déduit des estimations pour

$$\sup_{[0, T]} \|u\| \quad \text{et} \quad \int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dt.$$

CADRE B. — Soit A un opérateur monotone hémicontinu de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}'$ tel que

$$(Av, v) \geq \alpha \|v\|^p - C, \quad \alpha > 0, \quad \forall v \in \mathfrak{V}; \\ \|Av\| \leq C(\|v\|^{p-1} + 1), \quad \forall v \in \mathfrak{V} \quad \text{avec } p \geq 2.$$

Soit $\mathcal{K}$ un convexe fermé de $\mathfrak{V}$. On suppose que

$$(2.86) \quad (I + \lambda A)^{-1} \mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \quad \forall \lambda > 0.$$

THÉORÈME II.9. — Soit $f \in L^2(0, T; \mathfrak{H})$ et soit $u_0 \in \overline{\mathcal{K}}^{\mathfrak{H}}$; alors il existe une fonction unique u vérifiant

$$(2.87) \quad u \in L^p(0, T; \mathfrak{V}) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} \in L^{p'}(0, T; \mathfrak{V}'),$$

$$(2.88) \quad \left(\frac{du}{dt} + Au, v - u \right) \geq (f, v - u) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in \mathcal{K},$$

$$(2.89) \quad u(0) = u_0.$$

On a de plus $\frac{du}{dt} + Au \in L^2(0, T; \mathfrak{H})$ et

$$(2.90) \quad \left| \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \right| \leq |f(t)| \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Nous commençons par considérer le cas où f et u_0 sont réguliers.

LEMME II.4. — On suppose que $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; \mathcal{H})$ et que $u_0 \in \mathcal{H}$ avec $(A u_0 + \partial \Psi_{\mathcal{H}}(u_0)) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Alors la solution de (2.88)-(2.89) vérifie $A u(t) \in \mathcal{H}$, $\forall t \in [0, T]$,

$$(2.91) \quad \left(\frac{d^+ u}{dt}(t) + A u(t), A u(t) \right) \leq (f(t), A u(t)), \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(2.92) \quad \left(\frac{d^+ u}{dt}(t) + A u(t), \frac{d^+ u}{dt}(t) \right) = \left(f(t), \frac{d^+ u}{dt}(t) \right), \quad \forall t \in [0, T].$$

D'où en particulier :

$$\left| \frac{d^+ u}{dt}(t) + A u(t) \right| \leq |f(t)|, \quad \forall t \in [0, T].$$

Démonstration du lemme II.4. — Soit $t > 0$ fixé et soit u_ε la solution de l'équation

$$u_\varepsilon + \varepsilon A u_\varepsilon = u(t).$$

Reportant $v = u_\varepsilon$ dans l'inéquation

$$(2.93) \quad \left(\frac{d^+ u}{dt}(t) + A v, v - u(t) \right) \geq (f(t), v - u(t)),$$

on voit que $|A u_\varepsilon|$ est borné. Il est immédiat que $u_\varepsilon \rightarrow u(t)$ dans $\mathcal{V}$ faible et $\mathcal{H}$ fort, $A u_\varepsilon \rightarrow A u(t)$ dans $\mathcal{H}$ faible. D'où (2.91).

D'autre part, on a pour $h > 0$:

$$\left(\frac{d^+ u}{dt}(t) + A u(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right) \geq \left(f(t), \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right);$$

passant à la limite quand $h \rightarrow 0$, il vient

$$(2.94) \quad \left(\frac{d^+ u}{dt}(t) + A u(t), \frac{d^+ u}{dt}(t) \right) \geq \left(f(t), \frac{d^+ u}{dt}(t) \right).$$

Par ailleurs, appliquant (2.93) avec $t = t_0 + h$ et $v = u(t_0)$, on a

$$\left(\frac{d^+ u}{dt}(t_0 + h) + A u(t_0), \frac{u(t_0) - u(t_0 + h)}{h} \right) \geq \left(f(t_0 + h), \frac{u(t_0) - u(t_0 + h)}{h} \right).$$

Le passage à la limite quand $h \rightarrow 0$ conduit à

$$(2.95) \quad \left(\frac{d^+ u}{dt}(t_0) + A u(t_0), \frac{d^+ u}{dt}(t_0) \right) \leq \left(f(t_0), \frac{d^+ u}{dt}(t_0) \right)$$

car $t \mapsto \frac{d^+ u}{dt}(t)$ est continu à droite (cf. Crandall-Pazy [1] et Kato [1]).

Comparant (2.94) et (2.95) on obtient (2.92).

Démonstration du théorème II.9. — Soit $f_n \in C([0, T]; \mathcal{H})$ une suite telle que $\frac{df_n}{dt} \in L^1(0, T; \mathcal{H})$ et $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(0, T; \mathcal{H})$. L'ensemble $\{u \in \mathcal{H}; (Au + \partial\Psi_{\mathcal{H}}^*(u)) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset\}$ est dense dans $\overline{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}}$. En effet pour $u \in \mathcal{H}$, soit $u_\varepsilon = (I + \varepsilon A)^{-1} u \in \mathcal{H}$. On a

$$\|u_\varepsilon\|^2 + \varepsilon \alpha \|u_\varepsilon\|^p \leq \|u_\varepsilon\| \|u\| + C\varepsilon.$$

Donc $\|u_\varepsilon\|$ et $\varepsilon \|u_\varepsilon\|^p$ sont bornés et par suite :

$$\|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{V}'} \leq \varepsilon \|Au_\varepsilon\|_{\mathcal{V}'} \leq C(\|u_\varepsilon\|^{p-1} + 1).$$

Cette dernière quantité tend vers zéro quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Il en résulte que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $\mathcal{H}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Soit alors une suite $u_{0n} \in \mathcal{H}$ telle que $(Au_{0n} + \partial\Psi_{\mathcal{H}}^*(u_{0n})) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ et $u_{0n} \rightarrow u_0$ dans $\mathcal{H}$. La solution correspondante u_n de (2.88)-(2.89) vérifie

$$\left| \frac{du_n}{dt}(t) + Au_n(t) \right| \leq |f_n(t)|.$$

Comme u_n est borné dans $L^p(0, T; \mathcal{V})$, Au_n est borné dans $L^{p'}(0, T; \mathcal{V}')$ et $\frac{du_n}{dt}$ est borné dans $L^{p'}(0, T; \mathcal{V}')$. Le passage à la limite est immédiat.

REMARQUE II.15. — Dans le cas où A est un opérateur linéaire coercif et si $u_0 \in D(A^{1/2})$, alors (2.90) implique que $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $Au \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ (cf. Bardos [1]).

REMARQUE II.16. — L'estimation (2.90) peut être généralisée à des espaces de Banach X en vue d'obtenir des résultats de régularité dans les espaces L^p . Soit F l'application de dualité de X dans X' et soit u la solution de (2.88)-(2.89). Si l'on peut reporter dans (2.88), $v = u_\varepsilon$ solution de

$$u_\varepsilon + \varepsilon F\left(\frac{du_\varepsilon}{dt} + Au_\varepsilon\right) = u, \quad u_\varepsilon(0) = u_0,$$

alors u vérifie

$$\left\| \frac{du}{dt} + Au \right\|_X \leq \|f\|_X \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

II.2.4. RÉGULARITÉ EN x ; EXEMPLES. — Nous indiquons ici sur deux exemples comment on peut combiner les résultats de régularité du paragraphe II.2.3 avec les théorèmes de régularité pour les problèmes elliptiques obtenus aux paragraphes I.1.2 et I.2.2.

Exemple 1. — Soit $\Psi \in C^2(\bar{\Omega})$ (pour simplifier !) avec $\Psi \leq 0$ sur Γ . Étant donnés f et u_0 avec $u_0 \geq \Psi$ p. p. sur Ω , on cherche une fonction u (solution forte) vérifiant pour tout $t \in]0, T[$,

$$(2.96) \quad \begin{cases} u(x, t) \geq \Psi(x) & \text{p. p. sur } \Omega, \\ \frac{\partial^+ u}{\partial t} = \Delta u + f & \text{p. p. sur } [u(x, t) > \Psi(x)], \\ \frac{\partial^+ u}{\partial t} = \text{Max} \{ \Delta \Psi + f, 0 \} & \text{p. p. sur } [u(x, t) = \Psi(x)], \\ u(x, t) = 0 & \text{p. p. sur } \Gamma, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{p. p. sur } \Omega. \end{cases}$$

La formulation faible associée à ce problème s'écrit : $u(t) \in \mathcal{H}$ p. p. sur $]0, T[$,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} (v - u) dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx dt \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega} f (v - u) dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v(x, 0) - u_0(x)|^2 dx; \end{aligned}$$

$$\forall v \in L^2(0, T; \mathcal{V}), \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{V}') \quad \text{et} \quad v(t) \in \mathcal{H} \text{ p. p. sur }]0, T[,$$

où l'on prend $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$,

$$\mathcal{H} = \{ v \in H_0^1(\Omega); v \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \},$$

d'où

$$\overline{\mathcal{H}} = \{ v \in L^2(\Omega); v \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega \}.$$

Nous avons résumé dans un tableau les propriétés de u suivant les hypothèses faites sur f et u_0 .

Notons enfin que sous les hypothèses (d) on a, grâce à (2.74) :

$$\frac{\partial^+ u}{\partial t} + (Mu - f)^0 = 0, \quad \forall t \in]0, T[,$$

$$\text{i. e.} \quad \frac{\partial^+ u}{\partial t} + \text{Proj}_{Mu} f - f = 0, \quad \forall t \in]0, T[.$$

Or

$$\begin{aligned} Mu &= \left\{ g \in L^2(\Omega); \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx \geq \int_{\Omega} g (v - u) dx, \forall v \in \mathcal{H} \right\} \\ &= \left\{ g \in L^2(\Omega); \begin{array}{ll} g = -\Delta u & \text{p. p. sur } [u > \Psi] \\ g \leq -\Delta u & \text{p. p. sur } [u = \Psi] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Hypothèses	Conclusions
(a) $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ $u_0 \in L^2(\Omega)$	$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$
(b) $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ $u_0 \in L^2(\Omega)$	$u \in C(]0, T[; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(\delta, T; H^2(\Omega))$ $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\delta, T; L^2(\Omega));$ $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \forall \delta \in]0, T[$
(c) $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ $u_0 \in H_0^1(\Omega)$	$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$ $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$
(d) $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ $u_0 \in L^2(\Omega)$	$u \in L^\infty(\delta, T; H^2(\Omega)), \quad u(x, t) \in H^2(\Omega), \quad \forall t > 0$ $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\delta, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(\delta, T; H_0^1(\Omega))$ $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad \forall \delta \in]0, T[$
(e) $f \in C([0, T]; L^p(\Omega))$ $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T; L^p(\Omega))$ $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ avec $2 \leq p < +\infty$	$u \in L^\infty(0, T; W^{2,p}(\Omega)), \quad u(x, t) \in W^{2,p}(\Omega), \quad \forall t > 0$ $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$
(f) $f \in C([0, T]; L^\infty(\Omega))$ $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$	$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ $\Delta u \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$

(a) Provient du corollaire II.1.

(b), (c) et (d) se déduisent du théorème II.9 appliqué avec $Au = -\Delta u + \Delta \Psi$ ou bien du corollaire II.2 combiné au théorème I.1.

(e) résulte de la proposition II.3 appliquée avec $X = L^p(\Omega)$; on utilise le théorème I.1 ainsi que la remarque I.14.

(f) D'après la proposition II.3 on a

$$\left\| \frac{\partial^+ u}{\partial t}(t) \right\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\Delta u_0 + f(0)\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s) \right\|_{L^p(\Omega)} ds.$$

Le passage à la limite quand $p \rightarrow +\infty$ conduit à $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$. Par ailleurs, on a

$$|\Delta u| \leq \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| + |f| + |\Delta \Psi| \quad \text{p. p. sur } \Omega \times]0, T[.$$

Il est bien connu que p. p. sur $[u = \Psi]$ on a $\Delta u = \Delta \Psi$ et donc

$$\text{Proj}_{\mathbf{M}u} f = \begin{cases} -\Delta u & \text{p. p. sur } [u > \Psi], \\ \text{Min} \{ f, -\Delta \Psi \} & \text{p. p. sur } [u = \Psi]. \end{cases}$$

Par ailleurs :

$$E(\mathbf{M}u) = \{ g \in L^2(\Omega); g = -\Delta u \text{ p. p. sur } [u > \Psi] \}$$

et

$$\text{Proj}_{E(\mathbf{M}u)} f = \begin{cases} -\Delta u & \text{p. p. sur } [u > \Psi], \\ f & \text{p. p. sur } [u = \Psi]. \end{cases}$$

On a donc p. p. sur $]0, T[$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \quad \text{p. p. sur } [u > \Psi],$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{p. p. sur } [u = \Psi].$$

Exemple 2. — Soit j une fonction convexe s. c. i. de $\mathbf{R}$ dans $] -\infty, +\infty]$, $j \not\equiv +\infty$, et soit $\beta = dj$. Étant donnés f et u_0 , on cherche une fonction u (solution forte) vérifiant pour tout $t \in]0, T[$,

$$(2.97) \quad \begin{cases} \frac{\partial^+ u}{\partial t} = \Delta u + f & \text{p. p. sur } \Omega, \\ -\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta(u) & \text{p. p. sur } \Gamma, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{p. p. sur } \Omega. \end{cases}$$

La formulation faible associée à ce problème s'écrit $u \in L^2(0, T; \mathcal{V})$, $j(u) \in L^1(0, T; L^1(\Gamma))$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial t} (v - u) dx dt + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) dx dt + \int_0^T \varphi(v) - \varphi(u) dt \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega} f(v - u) dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v(x, 0) - u_0(x)|^2 dx; \\ & \forall v \in L^2(0, T; \mathcal{V}), \quad \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0, T; \mathcal{V}'), \quad j(v) \in L^1(0, T; L^1(\Gamma)), \end{aligned}$$

où l'on prend

$$\mathcal{V} = H^1(\Omega), \quad \mathcal{H} = L^2(\Omega), \quad \varphi(v) = \int_{\Gamma} j(v) d\Gamma,$$

avec

$$D(\varphi) = \{ v \in H^1(\Omega); j(v) \in L^1(\Omega) \} \quad \text{et} \quad \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}} = L^2(\Omega).$$

Nous avons résumé dans un tableau les propriétés de u suivant les hypothèses faites sur f et u_0 .

REMARQUE II.17. — Le problème (2.97) a été étudié précédemment avec divers choix de β , mais les propriétés de régularité que nous avons obtenues semblent nouvelles.

Hypothèses	Conclusions
(a) $f \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ $u_0 \in L^2(\Omega)$	$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$
(b) $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ $u_0 \in L^2(\Omega)$	$u \in C(]0, T[; H^1(\Omega)) \cap L^2(\delta, T; H^2(\Omega))$ $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(\delta, T; L^2(\Omega)), \quad \forall \delta \in]0, T[$
(c) $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ $u_0 \in H^1(\Omega)$ $j(u_0) \in L^1(\Gamma)$	$u \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$ $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$
(d) $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ $u_0 \in L^2(\Omega)$	$u \in L^\infty(\delta, T; H^2(\Omega)), \quad u(x, t) \in H^2(\Omega), \quad \forall t > 0$ $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(\delta, T; L^2(\Omega)), \quad \forall \delta \in]0, T[$
(e) $f \in C([0, T]; L^p(\Omega))$ $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T; L^p(\Omega))$ $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ $j(u_0) \in L^1(\Gamma)$ $-\frac{\partial u_0}{\partial n} \in \beta(u_0) \text{ p.p. sur } \Gamma$ $2 \leq p \leq +\infty$	$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap W^{1,p^*}(\Omega))$ $u(x, t) \in H^2(\Omega) \cap W^{1,p^*}(\Omega), \quad \forall t > 0$ $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ si $p < N$ $p^* = +\infty$ si $p > N$

(a) provient du corollaire II.5.

(b), (c) et (d) se déduisent du corollaire II.2 combiné au théorème I.10.

(e) résulte de la proposition II.3 appliquée avec $X = L^p(\Omega)$; on utilise les théorèmes I.10, I.11 ainsi que la remarque I.34. Le cas $p = +\infty$ est obtenu par passage à la limite comme dans l'exemple 1.

Indiquons, entre autres, les travaux de A. Friedman [1] (cas où β est continu); J. L. Lions-G. Stampacchia [1] [cas où $j(r) = 0$ si $r \geq 0$, $j(r) = +\infty$ si $r < 0$]; G. Duvaut-J. L. Lions [1], [2], [3], [4] [cas où $j(r) = |r|$].

II.2.5. PRINCIPE DU MAXIMUM ET THÉORÈMES DE COMPARAISON. — On considère sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ la forme bilinéaire

$$a(t; u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \sum_i b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} c(x, t) uv dx,$$

où $a_{ij}, b_i, c \in L^{\infty}(\Omega \times]0, T[)$ et

$$\sum a_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq a |\xi|^2 \quad \text{p. p. sur } \Omega \times]0, T[, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N; \quad a > 0.$$

On a

$$a(t; u, u) + \sigma \|u\|_{L^2}^2 \geq a \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$\lambda_0 = \text{Max} \left\{ 0, - \inf_{\Omega \times]0, T[} c(x, t) \right\}.$$

Nous commençons par établir l'analogie parabolique des propositions I.2, I.3 et I.4. Soit $\mathcal{K}$ l'un des convexes $K_i \cap H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, 5$ définis au paragraphe I.1.2.

PROPOSITION II.5. — Soient $u_0 \in \mathcal{K}^{\overline{L^2(\Omega)}}$ et $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$; soit $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ la solution de l'inéquation $u(t) \in \mathcal{K}$ p. p. sur $]0, T[$,

$$(2.98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \int_0^T a(t; u, v - u) dt \\ \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2, \\ \forall v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)); \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \\ v(t) \in \mathcal{K} \quad \text{p. p. sur }]0, T[. \end{array} \right.$$

Alors on a, pour tout $\lambda > \lambda_0$,

$$(2.99) \quad \text{Min} \left\{ 0, \inf_{\Omega} u_0, \inf_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} f}{\lambda - \lambda_0} \right\} \leq e^{-\lambda t} u \leq \text{Max} \left\{ 0, \sup_{\Omega} u_0, \sup_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} f}{\lambda - \lambda_0} \right\}.$$

Démonstration. — Soit

$$k = \text{Max} \left\{ 0, \sup_{\Omega} u_0, \sup_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} f}{\lambda - \lambda_0} \right\}.$$

Grâce à la remarque II.2, il existe des suites $u_n \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $f_n \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $u_{0n} \in \mathcal{K}$ telles que $\frac{du_n}{dt} \in L^2(\Omega \times]0, T[)$, $u_n(t) \in \mathcal{K}$, p. p. sur $]0, T[$,

$$(2.100) \quad \begin{cases} \left(\frac{du_n}{dt}, v - u_n \right) + a(t; u_n, v - u_n) \\ \geq (f_n, v - u_n) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in \mathcal{K}; \\ u_n(0) = u_{0n}, \end{cases}$$

avec $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et $u_{0n} \rightarrow u_0$ dans $L^2(\Omega)$.

On reporte dans (2.100),

$$v(t) = \text{Min} \{ u_n(t), e^{\lambda t} k \} = u_n - (u_n - e^{\lambda t} k)^+$$

(il est aisé de vérifier sur chacun des exemples $K_i \cap H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, 5$, que $v(t) \in \mathcal{K}$ p. p. sur $]0, T[$).

Il vient alors

$$\left(\frac{du_n}{dt}, (u_n - e^{\lambda t} k)^+ \right) + a(t; u_n, (u_n - e^{\lambda t} k)^+) \leq (f_n, (u_n - e^{\lambda t} k)^+) \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Par conséquent, si l'on pose $w_n = u_n - e^{\lambda t} k$, on a

$$(2.101) \quad \left(\frac{dw_n}{dt}, w_n^+ \right) + a(t; w_n, w_n^+) \leq (f_n - \lambda e^{\lambda t} k - c e^{\lambda t} k, w_n^+).$$

Intégrant (2.101) sur $]0, t[$ on obtient

$$\frac{1}{2} |w_n^+(t)|^2 - \frac{1}{2} |(u_{0n} - k)^+|^2 - \sigma \int_0^t |w_n^+(s)|^2 ds \leq \int_0^t (f_n - \lambda e^{\lambda s} k - c e^{\lambda s} k, w_n^+) ds.$$

Passant à la limite ⁽²²⁾, on a

$$\frac{1}{2} |w^+(t)|^2 - \frac{1}{2} |(u_0 - k)^+|^2 - \sigma \int_0^t |w^+(s)|^2 ds \leq \int_0^t (f - \lambda e^{\lambda s} k - c e^{\lambda s} k, w^+) ds \leq 0,$$

où $w = u - e^{\lambda t} k$.

Par conséquent $w^+ = 0$ et $u \leq e^{\lambda t} k$.

L'autre partie de (2.99) est prouvée de la même manière.

Le résultat suivant est un principe du maximum pour les problèmes d'évolution avec contraintes unilatérales sur Γ (analogue parabolique de la proposition I.11).

⁽²²⁾ Noter que l'application $u \rightarrow u^+$ est continue dans $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Soit j une fonction convexe s. e. i. de $\mathbf{R}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $j \not\equiv +\infty$, et soit $\beta = dj$.

PROPOSITION II.6. — Soient $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega \times]0, T[)$. Soit $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ la solution de

$$(2.102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \int_0^T a(t; u, v - u) dt + \int_0^T \int_{\Gamma} j(v) - j(u) d\Gamma dt \\ \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2, \\ \forall v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)); \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \quad j(v) \in L^1(\Gamma \times]0, T[). \end{array} \right.$$

Alors on a, pour tout $\lambda > \lambda_0$,

$$(2.103) \quad \begin{aligned} \text{Min} \left\{ \inf_{[0, T]} e^{-\lambda t} (\beta^+)^-(0), \inf_{\Omega} u_0, \inf_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} f}{\lambda - \lambda_0} \right\} \\ \leq e^{-\lambda t} u \leq \text{Max} \left\{ \sup_{[0, T]} e^{-\lambda t} (\beta^-)^-(0), \sup_{\Omega} u_0, \sup_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} f}{\lambda - \lambda_0} \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit

$$k = \text{Max} \left\{ \sup_{[0, T]} e^{-\lambda t} (\beta^-)^-(0), \sup_{\Omega} u_0, \sup_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} f}{\lambda - \lambda_0} \right\}.$$

On commence par établir (2.103) en supposant de plus que j est de classe $C^{1,1}$. Grâce à la remarque II.2, il existe des suites $u_n \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $f_n \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$, $u_{0n} \in H^1(\Omega)$ telles que $\frac{du_n}{dt} \in L^2(\Omega \times]0, T[)$.

$$(2.104) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{du_n}{dt}, v - u_n \right) + a(t; u_n, v - u_n) + \int_{\Gamma} j(v) - j(u_n) d\Gamma \\ \geq (f_n, v - u_n) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in H^1(\Omega); \\ u_n(0) = u_{0n}, \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} u_n &\rightarrow u && \text{dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \\ f_n &\rightarrow f && \text{dans } L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \\ u_{0n} &\rightarrow u_0 && \text{dans } L^2(\Omega). \end{aligned}$$

On reporte dans (2.104),

$$v = (1 - \theta) u_n + \theta \text{Min} \{ u_n, e^{\lambda t} k \} = u_n - \theta (u_n - e^{\lambda t} k)^+,$$

où $\theta \in]0, 1[$.

Posant $\varpi_n = u_n - e^{\lambda t} k$, on obtient

$$\left(\frac{du_n}{dt}, w_n^+\right) + a(t; u_n, w_n^+) + \int_{\Gamma} \frac{j(u_n) - j(u_n - \theta w_n^+)}{\theta} d\Gamma \leq (f_n, w_n^+) \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Le passage à la limite quand $\theta \rightarrow 0$ (n fixé) montre que

$$\left(\frac{du_n}{dt}, w_n^+\right) + a(t; u_n, w_n^+) + \int_{\Gamma} \beta(u_n) w_n^+ d\Gamma \leq (f_n, w_n^+) \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Or si

$$u_n > e^{\lambda t} k \geq e^{\lambda t} [e^{-\lambda t} (\bar{\beta}^1)^-(0)] = (\bar{\beta}^1)^-(0),$$

on a $\beta(u_n) \geq 0$. Par suite, $\beta(u_n) \varpi_n^+ \geq 0$ p. p. sur Γ et donc

$$(2.105) \quad \left(\frac{dw_n}{dt}, w_n^+\right) + a(t; w_n, w_n^+) \leq (f_n - \lambda e^{\lambda t} k - c e^{\lambda t} k, w_n^+).$$

Intégrant (2.105) sur $]0, t[$, puis passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on voit que $\varpi^+ = 0$. Nous avons donc établi (2.105) lorsque j est de classe $C^{1,1}$. Dans le cas général, soit j_ε la régularisée de j (cf. § I.2.4) et soit u_ε la solution correspondante de l'inéquation

$$(2.106) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u_\varepsilon\right) dt + \int_0^T a(t; u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) dt + \int_0^T \int_{\Gamma} j_\varepsilon(v) - j_\varepsilon(u_\varepsilon) d\Gamma dt \\ \geq \int_0^T (f, v - u_\varepsilon) dt - \frac{1}{2} \|v(0) - u_0\|^2; \\ \forall v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)); \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'). \end{array} \right.$$

D'après la première partie de la démonstration on sait que

$$e^{-\lambda t} u_\varepsilon \leq \text{Max} \left\{ \sup_{[0, T]} e^{-\lambda t} (\bar{\beta}_\varepsilon^1)^-(0), \sup_{\Omega} u_0, \sup_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} f}{\lambda - \lambda_0} \right\}.$$

Or $\bar{\beta}_\varepsilon^1(0) = \bar{\beta}^1(0)$; en effet,

$$z \in \bar{\beta}_\varepsilon^1(0) \iff \beta_\varepsilon(z) = 0 \iff z = (I + \varepsilon \beta)^{-1} z \iff 0 \in \beta(z) \iff z \in \bar{\beta}^1(0).$$

On achève alors la démonstration à l'aide du lemme suivant :

LEMME II.5. — Soit u_ε la solution de (2.106), alors u_ε converge dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ vers la solution u de (2.102).

Principe de la démonstration du lemme II.5. — Supposons, pour simplifier, que $\sigma = 0$. On montre, comme dans la démonstration du théo-

rème I.8, que u_ε est borné dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et que $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_\Gamma |u_\varepsilon - J_\varepsilon u_\varepsilon|^2 d\Gamma dt$ est borné où $J_\varepsilon = (I + \varepsilon\beta)^{-1}$. Soit alors $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tel que $\lim u_{\varepsilon_n} = u^*$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ faible, $\lim u_{\varepsilon_n}|_\Gamma = u^*|_\Gamma$ dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ faible, $\lim J_{\varepsilon_n} u_{\varepsilon_n}|_\Gamma = u^*|_\Gamma$ dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ faible.

Il est aisé de vérifier que u^* est une solution de (2.102) et grâce à l'unicité, on a $u^* = u$. Lorsque $\sigma = 0$, on peut utiliser la remarque II.5.

DÉPENDANCE DE u EN FONCTION DE f ET u_0 . — Soit φ une fonction convexe s. c. i. de $H^1(\Omega)$ dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$ vérifiant

$$(2.107) \quad \varphi(\text{Max}\{u - k, \hat{u}\}) + \varphi(\text{Min}\{u, \hat{u} + k\}) \leq \varphi(u) + \varphi(\hat{u}),$$

$$\forall u, \hat{u} \in H^1(\Omega), \quad \forall k \geq 0.$$

PROPOSITION II.7. — On fait l'hypothèse (2.107). Soient $u_0, \hat{u}_0 \in \overline{D}(\varphi)^{L^2}$ et $f, \hat{f} \in L^2(\Omega \times]0, T[);$ soient $u, \hat{u} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$ les solutions respectives des inéquations

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \int_0^T a(t; u, v - u) dt + \int_0^T \varphi(v) - \varphi(u) dt \\ & \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} |v(0) - u_0|^2, \\ & \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - \hat{u} \right) dt + \int_0^T a(t; \hat{u}, v - \hat{u}) dt + \int_0^T \varphi(v) - \varphi(\hat{u}) dt \\ & \geq \int_0^T (\hat{f}, v - \hat{u}) dt - \frac{1}{2} |v(0) - \hat{u}_0|^2, \\ & \forall v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)); \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \quad \varphi(v) \in L^1(0, T). \end{aligned}$$

Alors on a, pour tout $\lambda > \lambda_0$,

$$\begin{aligned} & \text{Min} \left\{ 0, \inf_{\Omega} (u_0 - \hat{u}_0), \inf_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} (f - \hat{f})}{\lambda - \lambda_0} \right\} \\ & \leq e^{-\lambda t} (u - \hat{u}) \leq \text{Max} \left\{ 0, \sup_{\Omega} (u_0 - \hat{u}_0), \sup_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} (f - \hat{f})}{\lambda - \lambda_0} \right\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit

$$k = \text{Max} \left\{ 0, \sup_{\Omega} (u_0 - \hat{u}_0), \sup_{\Omega \times]0, T[} \frac{e^{-\lambda t} (f - \hat{f})}{\lambda - \lambda_0} \right\}.$$

On considère les suites $u_n, \hat{u}_n \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $f_n, \hat{f}_n \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$, $u_{0n}, \hat{u}_{0n} \in D(\varphi)$ telles que $\frac{du_n}{dt}, \frac{d\hat{u}_n}{dt} \in L^2(\Omega \times]0, T[)$ et

$$(2.108) \quad \left(\frac{du_n}{dt}, v - u_n \right) + a(t; u_n, v - u_n) + \varphi(v) - \varphi(u_n) \geq (f_n, v - u_n);$$

$$(2.109) \quad \left(\frac{d\hat{u}_n}{dt}, v - \hat{u}_n \right) + a(t; \hat{u}_n, v - \hat{u}_n) + \varphi(v) - \varphi(\hat{u}_n) \geq (\hat{f}_n, v - \hat{u}_n)$$

$$\text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi);$$

$$u_n(0) = u_{0n}, \quad \hat{u}_n(0) = \hat{u}_{0n};$$

$u_n \rightarrow u$ et $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, $f_n \rightarrow f$ et $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ dans $L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$, $u_{0n} \rightarrow u_0$ et $\hat{u}_{0n} \rightarrow \hat{u}_0$ dans $L^2(\Omega)$.

On reporte dans (2.108) :

$$v = \text{Min} \{ u_n, \hat{u}_n + e^{\lambda t} k \} = u_n - (u_n - \hat{u}_n - e^{\lambda t} k)^+$$

et dans (2.109) :

$$v = \text{Max} \{ u_n - e^{\lambda t} k, \hat{u}_n \} = \hat{u}_n + (u_n - \hat{u}_n - e^{\lambda t} k)^+.$$

Après addition, il vient grâce à (2.107) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} (u_n - \hat{u}_n), (u_n - \hat{u}_n - e^{\lambda t} k)^+ \right) + (a(t; u_n - \hat{u}_n, (u_n - \hat{u}_n - e^{\lambda t} k)^+)) \\ & \leq (f_n - \hat{f}_n, (u_n - \hat{u}_n - e^{\lambda t} k)^+). \end{aligned}$$

On pose $w_n = u_n - \hat{u}_n - e^{\lambda t} k$; d'où

$$(2.110) \quad \left(\frac{dw_n}{dt}, w_n^+ \right) + a(t; w_n, w_n^+) \leq (f_n - \hat{f}_n - \lambda e^{\lambda t} k - c e^{\lambda t} k, w_n^+).$$

Intégrant (2.110) sur $]0, t[$ et passant ensuite à la limite, on voit que $w^+ = 0$, où $w = u - \hat{u} - e^{\lambda t} k$.

APPLICATIONS. — L'hypothèse (2.107) est satisfaite dans deux cas particuliers importantes.

Exemple 1. — Soit K l'un des convexes $K_i \cap H_0^1(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, 5$, et soit φ la fonction indicatrice de K . On vérifie aisément que $\text{Max} \{ u - k, \hat{u} \} \in K$ et $\text{Min} \{ u, \hat{u} + k \} \in K$, $\forall u, \hat{u} \in K$, $\forall k \geq 0$; d'où (2.107).

Exemple 2. — Soit j une fonction convexe s. c. i. de $\mathbf{R}$ dans $] -\infty, +\infty]$, $j \not\equiv +\infty$, et soit $\varphi(u) = \int_{\Gamma} j(u) d\Gamma$, alors (2.107) a lieu. En effet,

$$j(\text{Max} \{ r - k, \hat{r} \}) + j(\text{Min} \{ r, \hat{r} + k \}) \leq j(r) + j(\hat{r}), \quad \forall r, \hat{r} \in \mathbf{R}, \quad \forall k \geq 0.$$

Car si $r - k > \hat{r}$, on écrit

$$r - k = (1 - t)r + t\hat{r}, \quad \hat{r} + k = tr + (1 - t)\hat{r} \quad \text{avec} \quad t = \frac{k}{r - \hat{r}} \in [0, 1],$$

et par convexité il vient

$$j(r - k) + j(\hat{r} + k) \leq j(r) + j(\hat{r}).$$

On en déduit (2.107) par intégration.

DÉPENDANCE DE u EN FONCTION DES CONTRAINTES. — Soient φ et $\hat{\varphi}$ deux fonctions convexes s. c. i. de $H^1(\Omega)$ dans $]-\infty, +\infty]$, φ et $\hat{\varphi} \not\equiv +\infty$, vérifiant

$$(2.111) \quad \varphi(\text{Max}\{u, \hat{u}\}) + \hat{\varphi}(\text{Min}\{u, \hat{u}\}) \leq \varphi(u) + \hat{\varphi}(\hat{u}), \quad \forall u, \hat{u} \in H^1(\Omega).$$

PROPOSITION II.8. — On fait l'hypothèse (2.111). Soient $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^{L^1}$, $\hat{u}_0 \in \overline{D(\hat{\varphi})}^{L^1}$, $f \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$ et soient

$$u, \hat{u} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$$

les solutions respectives des inéquations

$$(2.112) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \int_0^T a(t; u, v - u) dt + \int_0^T \varphi(v) - \varphi(u) dt \\ \geq \int_0^T (f, v - u) dt - \frac{1}{2} |v(0) - u_0|^2, \\ \forall v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)); \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \quad \varphi(v) \in L^1(0, T); \end{array} \right.$$

$$(2.113) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - \hat{u} \right) dt + \int_0^T a(t; \hat{u}, v - \hat{u}) dt + \int_0^T \hat{\varphi}(v) - \hat{\varphi}(\hat{u}) dt \\ \geq \int_0^T (f, v - \hat{u}) dt - \frac{1}{2} |v(0) - \hat{u}_0|^2, \\ \forall v \in L^2(0, T; H^1(\Omega)); \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))'), \quad \hat{\varphi}(v) \in L^1(0, T); \\ u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad \hat{u}(0) = \hat{u}_0. \end{array} \right.$$

On suppose que $u_0 \geq \hat{u}_0$ p. p. sur Ω , alors $u \geq \hat{u}$ p. p. sur $\Omega \times]0, T[$.

Démonstration. — On considère les suites $u_n, \hat{u}_n \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $f_n, \hat{f}_n \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$, $u_{0n} \in D(\varphi)$, $\hat{u}_{0n} \in D(\hat{\varphi})$ telles que

$$\frac{du_n}{dt}, \frac{d\hat{u}_n}{dt} \in L^2(\Omega \times]0, T[),$$

$$(2.114) \quad \left(\frac{du_n}{dt}, v - u_n \right) + a(t; u_n, v - u_n) + \varphi(v) - \varphi(u_n) \\ \geq (f_n, v - u_n) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi);$$

$$(2.115) \quad \left(\frac{d\hat{u}_n}{dt}, v - \hat{u}_n \right) + a(t; \hat{u}_n, v - \hat{u}_n) + \hat{\varphi}(v) - \hat{\varphi}(\hat{u}_n) \\ \geq (\hat{f}_n, v - \hat{u}_n) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in D(\hat{\varphi}); \\ u_n(0) = u_{0n}, \quad \hat{u}_n(0) = \hat{u}_{0n};$$

$u_n \rightarrow u$ et $\hat{u}_n \rightarrow \hat{u}$ dans $L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega))$, $f_n \rightarrow f$ et $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ dans $L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$, $u_{0n} \rightarrow u_0$ et $\hat{u}_{0n} \rightarrow \hat{u}_0$ dans $L^2(\Omega)$. On reporte dans (2.114) :

$$v = \text{Max} \{ u_n, \hat{u}_n \} = u_n + (\hat{u}_n - u_n)^+$$

et dans (2.115) :

$$v = \text{Min} \{ u_n, \hat{u}_n \} = u_n - (\hat{u}_n - u_n)^+.$$

Après addition, il vient grâce à (2.111) :

$$(2.116) \quad \left(\frac{d\hat{u}_n}{dt} - \frac{du_n}{dt}, (\hat{u}_n - u_n)^+ \right) + a(t; \hat{u}_n - u_n, (\hat{u}_n - u_n)^+) \leq (\hat{f}_n - f_n, (\hat{u}_n - u_n)^+).$$

Intégrant (2.116) sur $]0, t[$ et passant ensuite à la limite, on voit que $(\hat{u} - u)^+ \leq 0$; d'où $u \geq \hat{u}$ p. p. sur $\Omega \times]0, T[$.

APPLICATIONS.

Exemple 3. — Soit φ (resp. $\hat{\varphi}$) la fonction indicatrice du convexe

$$\{ v \in H_0^1(\Omega); v \geq \Psi \text{ (resp. } v \geq \hat{\Psi}) \text{ p. p. sur } \Omega \}.$$

Si $\Psi \geq \hat{\Psi}$ p. p. sur Ω , alors (2.111) a lieu. On a, en fait, dans ce cas un résultat plus précis : pour tout $\lambda \geq \lambda_0$,

$$\text{Min} \left\{ 0, \inf_{\Omega} (u_0 - \hat{u}_0), \inf_{\Omega} (\Psi - \hat{\Psi}) \right\} \\ \leq e^{-\lambda t} (u - \hat{u}) \leq \text{Max} \left\{ 0, \sup_{\Omega} (u_0 - \hat{u}_0), \sup_{\Omega} (\Psi - \hat{\Psi}) \right\}.$$

(On pourra procéder comme dans l'exemple suivant la proposition I.9.)

Exemple 4. — Soit j (resp. $\hat{j}$) une fonction convexe s. c. i. de $\mathbf{R}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $j \not\equiv +\infty$ (resp. $\hat{j} \not\equiv +\infty$) et soit

$$\varphi(u) = \int_{\Gamma} j(u) d\Gamma \left[\text{resp. } \hat{\varphi}(u) = \int_{\Gamma} \hat{j}(u) d\Gamma \right].$$

Soit $\beta = dj$ (resp. $\hat{\beta} = d\hat{j}$). On suppose que

$$(2.117) \quad \beta^-(r) \leq \hat{\beta}^+(r), \quad \forall r \in \mathbf{R}.$$

Alors (2.111) a lieu. En effet, (2.117) équivaut (cf. Remarque I.35) à

$$j(\text{Max}\{r, \hat{r}\}) + \hat{j}(\text{Min}\{r, \hat{r}\}) \leq j(r) + \hat{j}(\hat{r}), \quad \forall r, \hat{r} \in \mathbf{R}$$

et l'on en déduit (2.111) par intégration.

II.2.6. AUTRES PROBLÈMES UNILATÉRAUX D'ÉVOLUTION. — Nous décrivons maintenant trois problèmes unilatéraux d'évolution sensiblement différents de ceux étudiés jusqu'ici.

(A) Problèmes unilatéraux elliptiques dépendant d'un paramètre.

(B) Problèmes avec contraintes unilatérales sur $\frac{du}{dt}$ du type

$$a\left(u, v - \frac{du}{dt}\right) + \varphi(v) - \varphi\left(\frac{du}{dt}\right) \geq \left(f, v - \frac{du}{dt}\right).$$

(C) Problèmes avec contraintes unilatérales sur $\frac{du}{dt}$ du type

$$\left(\frac{du}{dt}, v - \frac{du}{dt}\right) + a\left(u, v - \frac{du}{dt}\right) + \varphi(v) - \varphi\left(\frac{du}{dt}\right) \geq \left(f, v - \frac{du}{dt}\right).$$

(A) PROBLÈMES UNILATÉRAUX ELLIPTIQUES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE. — Soit $a(u, v)$ comme au paragraphe I.1.1 et soit $K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega\}$ avec $\Psi \in L^2(\Omega)$, $K \neq \emptyset$.

Soient pour tout $t \in [0, T]$, $f(t) \in H^{-1}(\Omega)$ et $u(t) \in K$ la solution de l'inéquation

$$(2.118) \quad a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t)), \quad \forall v \in K.$$

THÉORÈME II.10. — On fait les hypothèses suivantes :

(2.119) $t \mapsto f(t)$ est décroissant i. e. $f(t_2) - f(t_1)$ est une mesure positive sur Ω , $\forall t_1 \geq t_2$,

(2.120) $t \mapsto f(t)$ est dérivable à droite dans $H^{-1}(\Omega)$ en tout $t \in [0, T[$.

Alors on a

(2.121) $t \mapsto u(t)$ est décroissant et dérivable à droite dans $H_0^1(\Omega)$ en tout $t \in [0, T[$; de plus :

$$(2.122) \quad a\left(\frac{d^+ u}{dt}(t), v - u(t)\right) \geq \left(\frac{d^+ f}{dt}(t), v - u(t)\right), \quad \forall t \in [0, T[, \quad \forall v \in K$$

et

$$(2.123) \quad a\left(\frac{d^+ u}{dt}(t), \frac{d^+ u}{dt}(t)\right) = \left(\frac{d^+ f}{dt}(t), \frac{d^+ u}{dt}(t)\right), \quad \forall t \in [0, T[.$$

Nous utiliserons dans la démonstration du théorème II.10, le lemme suivant :

LEMME II.6. — Soient $f, \hat{f} \in H^{-1}(\Omega)$ avec $f \geq \hat{f}$ sur Ω et soient $u, \hat{u} \in K$ les solutions respectives des inéquations

$$a(u, v - u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in K,$$

$$a(\hat{u}, v - \hat{u}) \geq (\hat{f}, v - \hat{u}), \quad \forall v \in K.$$

Alors $u \geq \hat{u}$ p. p. sur Ω et on a

$$a(\hat{u} - u, v - \hat{u}) \geq (\hat{f} - f, v - \hat{u}), \quad \forall v \in K.$$

Démonstration du lemme II.6. — Soient $u_\varepsilon, \hat{u}_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ les solutions respectives des équations

$$L u_\varepsilon - \frac{(\Psi - u_\varepsilon)^+}{\varepsilon} = f \quad \text{sur } \Omega, \quad \varepsilon > 0,$$

$$L \hat{u}_\varepsilon - \frac{(\Psi - \hat{u}_\varepsilon)^+}{\varepsilon} = \hat{f} \quad \text{sur } \Omega, \quad \varepsilon > 0.$$

On vérifie aisément (cf. Lions [5], chap. 3.5) que $u_\varepsilon \rightarrow u$ et $\hat{u}_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

D'autre part $u_\varepsilon \geq \hat{u}_\varepsilon$ p. p. sur Ω (on pourra procéder comme à la proposition I.5). Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$a(\hat{u}_\varepsilon - u_\varepsilon, v - \hat{u}_\varepsilon) = (\hat{f} - f, v - \hat{u}_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (\Psi - \hat{u}_\varepsilon)^+ - (\Psi - u_\varepsilon)^+ \cdot v - \hat{u}_\varepsilon \, dx.$$

Or si $v \in K$, on a

$$(\Psi - \hat{u}_\varepsilon)^+ - (\Psi - u_\varepsilon)^+ \cdot v - \hat{u}_\varepsilon \geq 0 \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

En effet, $(\Psi - \hat{u}_\varepsilon)^+ \geq (\Psi - u_\varepsilon)^+$ p. p. sur Ω ; de plus, sur $[\hat{u}_\varepsilon \geq \Psi]$, on a $(\Psi - \hat{u}_\varepsilon)^+ = (\Psi - u_\varepsilon)^+ = 0$ et sur $[\hat{u}_\varepsilon \leq \Psi]$ on a $v - \hat{u}_\varepsilon \geq 0$

puisque $v \in K$. Par conséquent :

$$a(\hat{u}_\varepsilon - u_\varepsilon, v - \hat{u}_\varepsilon) \geq (\hat{f} - f, v - \hat{u}_\varepsilon).$$

On achève la démonstration en passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration du théorème II.10. — Pour $u \in K$, on introduit la notation

$$\Pi_K(u) = \overline{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(K - u)}^{H_0^1}.$$

On établit le théorème II.10 en $t = 0$.

Soit $z_h = \frac{u(h) - u(0)}{h}$, $h > 0$. Grâce à l'hypothèse (2.119) et au lemme II.6, on a

$$(2.124) \quad a(u(h) - u(0), v - u(h)) \geq (f(h) - f(0), v - u(h)), \quad \forall v \in K.$$

Prenant $v = u(0)$ dans (2.124), il vient

$$(2.125) \quad a(z_h, z_h) \leq \left(\frac{f(h) - f(0)}{h}, z_h \right).$$

En particulier z_h est borné dans $H_0^1(\Omega)$ et $u(h) \rightarrow u(0)$ dans $H_0^1(\Omega)$ quand $h \rightarrow 0$. Soit $h_n \rightarrow 0$ tel que $\lim_{h_n \rightarrow 0} z_{h_n} = z$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible.

Passant à la limite dans (2.124), après division par h , on obtient

$$a(z, v - u(0)) \geq \left(\frac{d^+ f}{dt}(0), v - u(0) \right), \quad \forall v \in K.$$

Par suite :

$$a(z, \lambda(v - u(0))) \geq \left(\frac{d^+ f}{dt}(0), \lambda(v - u(0)) \right), \quad \forall v \in K, \quad \forall \lambda \geq 0$$

et donc

$$(2.126) \quad a(z, w) \geq \left(\frac{d^+ f}{dt}(0), w \right), \quad \forall w \in \Pi_K(u(0)).$$

D'autre part, le passage à la limite dans (2.125) conduit à

$$(2.127) \quad a(z, z) \leq \left(\frac{d^+ f}{dt}(0), z \right).$$

Retranchant (2.127) de (2.126), on a

$$(2.128) \quad a(z, w - z) \geq \left(\frac{d^+ f}{dt}(0), w - z \right), \quad \forall w \in \Pi_K(u(0)).$$

Enfin puisque $z \in \Pi_K(u(0))$, z est caractérisé comme l'unique solution de l'inéquation (2.128).

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} z_h = z$ dans $H_0^1(\Omega)$ faible.

Il résulte de (2.126) et (2.127) que

$$a(z, z) = \left(\frac{d^+ f}{dt}(0), z \right).$$

Enfin, grâce à (2.125), on a

$$\limsup_{h \rightarrow 0} a(z_h, z_h) \leq \left(\frac{d^+ f}{dt}(0), z \right) = a(z, z);$$

d'où l'on déduit que $z_h \rightarrow z$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort.

REMARQUE II.18. — Lorsque $a(u, v)$ est symétrique on peut résoudre directement l'inéquation (2.122) à l'aide des méthodes du paragraphe II.2.2.

En effet, si l'on munit $H_0^1(\Omega)$ du produit scalaire $a(u, v)$, l'inéquation (2.122) s'écrit :

$$\frac{d^+ u}{dt} + \partial \Psi_K(u) \ni \bar{A}^{-1} \frac{d^+ f}{dt},$$

où $\partial \Psi_K$ est le sous-différentiel dans $H_0^1(\Omega)$ de la fonction indicatrice de K .

Supposant f assez régulière on peut résoudre ce problème à l'aide du théorème II.4 (ou bien du théorème II.5). On sait que l'on a alors

$$\frac{d^+ u}{dt} + \left(\partial \Psi_K(u) - \bar{A}^{-1} \frac{df}{dt} \right)^0 = 0,$$

autrement dit

$$\frac{d^+ u}{dt} + \text{Proj}_{\partial \Psi_K(u)} \bar{A}^{-1} \frac{df}{dt} - \bar{A}^{-1} \frac{df}{dt} = 0$$

[bien entendu les projections sont à considérer dans H_0^1 muni du produit scalaire $a(u, v)$]. Or les cônes $\Pi_K(u)$ et $\partial \Psi_K(u)$ sont polaires dans $H_0^1(\Omega)$. Par suite, on a

$$\frac{d^+ u}{dt} = \text{Proj}_{\Pi_K(u)} \bar{A}^{-1} \frac{df}{dt}.$$

On retrouve ainsi (2.128).

REMARQUE II.19. — Si $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$(2.129) \quad \Pi_K(u) \subset \{ w \in H_0^1(\Omega); w \geq 0 \text{ p. p. sur } [u = \Psi] \}$$

et si de plus $u, \Psi \in C(\bar{\Omega})$, alors

$$(2.130) \quad \{ w \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}); w \geq 0 \text{ sur } [u = \Psi] \} \subset \Pi_K(u).$$

L'inclusion (2.129) est immédiate; en effet, soit $\varpi \in \Pi_K(u)$ i. e. $\varpi = \lim \varpi_0$ dans $H_0^1(\Omega)$ où $\varpi_n = \lambda_n(\varphi_n - u)$, $\varphi_n \in K$ et $\lambda_n \geq 0$.

Par suite $\varpi_n \geq 0$ p. p. sur $[u = \Psi]$. Prouvons (2.130); soit $\varpi \in H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tel que $\varpi \geq 0$ sur $[u = \Psi]$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\varpi_\varepsilon = \varpi^+ - (\varpi + \varepsilon)^-$; il est clair que $\varpi_\varepsilon \rightarrow \varpi$ dans $H_0^1(\Omega)$. Montrons que $\varpi_\varepsilon \in \Pi_K(u)$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\varpi > -\varepsilon$ sur $[\Psi < u < \Psi + \delta]$ [sinon, on considère $\delta_n \rightarrow 0$ et $x_n \in \Omega$ tels que $\varpi(x_n) \leq -\varepsilon$, $\Psi(x_n) \leq u(x_n) \leq \Psi(x_n) + \delta_n$ et $x_n \rightarrow x_0$; grâce à la continuité de ϖ , Ψ , u on aurait $\varpi(x_0) \leq -\varepsilon$ et $u(x_0) = \Psi(x_0)$ ce qui est absurde]. On pose

$$\lambda = \frac{1}{\delta} (\text{Sup}_{\Omega} |\bar{w}| + \varepsilon) \quad \text{et} \quad v = \frac{w_\varepsilon}{\lambda} + u.$$

Montrons que $v \in K$:

— sur $[\Psi \leq u \leq \Psi + \delta]$, on a

$$w > -\varepsilon \quad \text{et donc} \quad w_\varepsilon = w^+ \geq 0; \quad \text{d'où} \quad v \geq u \geq \Psi;$$

— sur $[u > \Psi + \delta]$, on a

$$v \geq \Psi + \delta - \frac{1}{\lambda} \text{Sup}_{\Omega} |w_\varepsilon| \geq \Psi + \delta - \frac{1}{\lambda} (\text{Sup}_{\Omega} |w| + \varepsilon) \geq \Psi.$$

On a un résultat semblable au théorème II.10 pour les problèmes avec contraintes sur Γ . Soit $a(u, v)$ comme au paragraphe I.2.1 et soit $K = \{v \in H^1(\Omega); v \geq 0 \text{ p. p. sur } \Gamma\}$.

Soient pour tout $t \in [0, T]$, $f(t) \in L^2(\Omega)$ et $u(t) \in K$ la solution de l'inéquation

$$a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t)), \quad \forall v \in K.$$

THÉORÈME II.11. — On fait l'hypothèse suivante :

$t \mapsto f(t)$ est décroissant et dérivable à droite dans $L^2(\Omega)$ en tout $t \in [0, T[$.

Alors on a :

$t \mapsto u(t)$ est décroissant et dérivable à droite dans $H^1(\Omega)$ en tout $t \in [0, T[$; de plus :

$$a\left(\frac{d^+ u}{dt}(t), v - u(t)\right) \geq \left(\frac{d^+ f}{dt}(t), v - u(t)\right), \quad \forall t \in [0, T[, \quad \forall v \in K$$

et

$$a\left(\frac{d^+ u}{dt}(t), \frac{d^+ u}{dt}(t)\right) = \left(\frac{d^+ f}{dt}(t), \frac{d^+ u}{dt}(t)\right), \quad \forall t \in [0, T[.$$

Principe de la démonstration. — On établit d'abord l'analogue du lemme II.6, en considérant l'approximation

$$\begin{aligned} L u_\varepsilon &= f \quad \text{dans } \Omega, & -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} &= \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad \text{sur } \Gamma; \\ L \hat{u}_\varepsilon &= \hat{f} \quad \text{dans } \Omega, & -\frac{\partial \hat{u}_\varepsilon}{\partial \nu} &= \beta_\varepsilon(\hat{u}_\varepsilon) \quad \text{sur } \Gamma; \end{aligned}$$

où β est décrit à l'exemple 4 du paragraphe I.2.1 et $\beta_\varepsilon(r) = -\frac{r}{\varepsilon}$.

On sait (cf. théorème I.8) que $u_\varepsilon \rightarrow u$, $\hat{u}_\varepsilon \rightarrow \hat{u}$ dans $H^1(\Omega)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $u_\varepsilon \geq \hat{u}_\varepsilon$ p. p. sur Ω (cf. proposition I.12).

On vérifie que

$$a(\hat{u}_\varepsilon - u_\varepsilon, v - \hat{u}_\varepsilon) \geq (\hat{f} - f, v - \hat{u}_\varepsilon), \quad \forall v \in K.$$

On adapte ensuite aisément la démonstration du théorème II.10.

(B) PROBLÈMES AVEC CONTRAINTES UNILATÉRALES SUR $\frac{du}{dt}$ DU TYPE

$$a\left(u, v - \frac{du}{dt}\right) + \varphi(v) - \varphi\left(\frac{du}{dt}\right) \geq \left(f, v - \frac{du}{dt}\right).$$

Soit H un espace de Hilbert et soit φ une fonction convexe s. c. i. de H dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$. Étant donnés f et u_0 on cherche u solution du problème :

$$\begin{aligned} &\left(u, v - \frac{du}{dt}\right) + \varphi(v) - \varphi\left(\frac{du}{dt}\right) \\ &\geq \left(f, v - \frac{du}{dt}\right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi); u(0) = u_0. \end{aligned}$$

THÉORÈME II.12. — Soit $f \in L^2(0, T; H)$ avec

$$\frac{df}{dt} \in L^2(0, T; H) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 f}{dt^2} \in L^1(0, T; H).$$

Soit $u_0 \in H$; on fait l'hypothèse suivante ⁽²³⁾ :

(2.131) il existe $u_1 \in D(\varphi)$ tel que

$$(u_0, v - u_1) + \varphi(v) - \varphi(u_1) \geq (f(0), v - u_1), \quad \forall v \in D(\varphi).$$

⁽²³⁾ L'hypothèse (2.131) est aussi nécessaire pour l'existence d'une solution vérifiant (2.132)-(2.136).

Alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; H)$ vérifiant :

(2.132) u est dérivable à droite en tout $t \in [0, T[$;

(2.133) $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; H)$ et plus précisément :

$$\left| \frac{d^+ u}{dt}(t) \right| \leq \left| \frac{df}{dt}(t) \right| + \left| \frac{df}{dt}(0) - u_1 \right| + \int_0^t \left| \frac{d^2 f}{dt^2}(s) \right| ds, \quad \forall t \in [0, T];$$

$$(2.134) \quad \frac{d^+ u}{dt} \in D(\varphi), \quad \forall t \in [0, T];$$

$$(2.135) \quad \begin{cases} \left(u, v - \frac{d^+ u}{dt} \right) + \varphi(v) - \varphi\left(\frac{d^+ u}{dt}\right) \geq \left(f, v - \frac{d^+ u}{dt} \right), \\ \forall t \in [0, T], \quad \forall v \in D(\varphi); \end{cases}$$

$$(2.136) \quad u(0) = u_0.$$

Démonstration. — Soit $\varphi^*(u) = \sup_{v \in H} \{ (u, v) - \varphi(v) \}$ la fonction convexe conjuguée (cf. Moreau [1]) de φ . Le problème (2.135) s'écrit $f - u \in \partial\varphi\left(\frac{d^+ u}{dt}\right)$ ou encore $\frac{d^+ u}{dt} \in \partial\varphi^*(f - u)$.

Posant $w = f - u$, il vient

$$(2.137) \quad \begin{cases} \frac{dw}{dt} + \partial\varphi^*(w) \ni \frac{df}{dt}, \\ w(0) = w_0 = f(0) - u_0. \end{cases}$$

On peut alors appliquer le théorème II.4 pour résoudre (2.137); en effet l'hypothèse (2.131) assure que $w_0 \in \partial\varphi(u_1)$ i. e. $u_1 \in \partial\varphi^*(w_0)$ et donc $w_0 \in D(\partial\varphi^*)$.

On a de plus :

$$\left| \frac{d^+ w}{dt}(t) \right| \leq \left| \left(\partial\varphi^*(w_0) - \frac{df}{dt}(0) \right)^0 \right| + \int_0^t \left| \frac{d^2 f}{dt^2}(s) \right| ds;$$

d'où l'on déduit (2.133).

Le problème (2.135)-(2.136) admet encore une solution même si l'on fait moins d'hypothèses sur f et u_0 .

PROPOSITION II.9. — Soit $f \in L^2(0, T; H)$ avec $\frac{df}{dt} \in L^2(0, T; H)$. Soit $u_0 \in H$ tel que

$$(2.138) \quad \sup_{v \in D(\varphi)} \{ (f(0) - u_0, v) - \varphi(v) \} < +\infty.$$

Alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; H)$ vérifiant

$$(2.139) \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H), \quad \frac{du}{dt} \in D(\varphi) \quad \text{p. p. sur }]0, T[,$$

$$(2.140) \quad \left(u, v - \frac{du}{dt}\right) + \varphi(v) - \varphi\left(\frac{du}{dt}\right) \geq \left(f, v - \frac{du}{dt}\right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi),$$

$$(2.141) \quad u(0) = u_0.$$

Si de plus $\frac{d^2 f}{dt^2} \in L^1(0, T; H)$, alors on a

$$(2.142) \quad \frac{du}{dt} \in L^\infty(\delta, T; H), \quad \forall \delta \in]0, T[$$

et (2.132), (2.134), (2.135) sont vérifiés pour tout $t \in]0, T[$.

Démonstration. — On applique le théorème II.5 à (2.137); l'hypothèse (2.138) assure que $\varphi^*(f(0) - u_0) = \varphi^*(\omega_0) < +\infty$, et donc $\omega_0 \in D(\varphi^*)$. Lorsque $\frac{d^2 f}{dt^2} \in L^1(0, T; H)$ on utilise le théorème II.6.

REMARQUE II.20. — On suppose que u_0 appartient à la fermeture de l'ensemble

$$\{z \in H; \sup_{v \in H} \{(f(0) - z, v) - \varphi(v)\} < +\infty\}.$$

Alors la proposition II.9 demeure vraie pourvu que l'on remplace (2.139) par

$$\frac{du}{dt} \in L^2(\delta, T; H), \quad \forall \delta \in]0, T[.$$

REMARQUE II.21. — Supposons que φ soit la fonction indicatrice d'un cône K de sommet θ . Alors on a p. p. sur $]0, T[$,

$$\left(u, \theta - \frac{du}{dt}\right) = \left(f, \theta - \frac{du}{dt}\right) \quad \text{et} \quad \left|\frac{du}{dt}\right|^2 = \left(\frac{df}{dt}, \frac{du}{dt} - \theta\right) + \left(\theta, \frac{du}{dt}\right),$$

i. e.

$$\left|\frac{du}{dt} - \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{df}{dt}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\theta - \frac{df}{dt}\right|.$$

En effet, soit $K_0 = K - \theta$; on a

$$\varphi^*(u) = (u, \theta) + \Psi_{K_0}^1,$$

où K_0^1 est le cône polaire de K_0 . Par suite,

$$\frac{dw}{dt} + \theta + \partial \Psi_{K_0}^1(w) \ni \frac{df}{dt};$$

il en résulte [cf. théorème II.5, (2.36)] que

$$\left| \frac{dw}{dt} \right|^2 = \left(\frac{df}{dt} - 0, \frac{dw}{dt} \right), \quad \text{soit} \quad \left| \frac{df}{dt} - \frac{du}{dt} \right|^2 = \left(\frac{df}{dt} - 0, \frac{df}{dt} - \frac{du}{dt} \right).$$

REMARQUE II.22. — Sous les hypothèses du théorème II.12, $\frac{d^+ u}{dt}(t)$ coïncide pour tout $t \in [0, T[$ avec la projection de $\frac{df}{dt}(t)$ sur l'ensemble convexe fermé

$$\{ z \in H; (u(t), v - z) + \varphi(v) - \varphi(z) \geq (f(t), v - z), \forall v \in D(\varphi) \}.$$

En effet, on sait que

$$\frac{d^+ w}{dt} + \left(\partial\varphi^*(w) - \frac{df}{dt} \right)^0 = 0, \quad \text{soit} \quad \frac{d^+ w}{dt} + \text{Proj}_{\partial\varphi^*(w)} \frac{df}{dt} - \frac{df}{dt} = 0,$$

i. e.

$$\frac{d^+ u}{dt} = \text{Proj}_{\partial\varphi^*(w)} \frac{df}{dt}; \quad \text{or} \quad z \in \partial\varphi^*(w)$$

si et seulement si $w \in \partial\varphi(z)$, i. e. $f - u \in \partial\varphi(z)$.

APPLICATIONS. — Nous étudions le problème de manière plus détaillée sur deux exemples.

Exemple 1. — On suppose que

$$(2.143) \quad \Psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$(2.144) \quad f \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

$$(2.145) \quad u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad -\Delta u_0 \geq f(0) \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

THÉORÈME II.13. — On fait les hypothèses (2.143)-(2.145); alors il existe une fonction unique u vérifiant

$$(2.146) \quad u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty((0, T; H^2(\Omega)),$$

$$(2.147) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

$$(2.148) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \geq \Psi & \text{p. p. sur } \Omega \times]0, T[, \\ -\Delta u = f & \text{p. p. sur } \left[\frac{\partial u}{\partial t} > \Psi \right], \\ -\Delta u \geq f & \text{p. p. sur } \left[\frac{\partial u}{\partial t} = \Psi \right], \end{cases}$$

$$(2.149) \quad u(x, t) = 0 \quad \text{p. p. sur } \Gamma \times]0, T[,$$

$$(2.150) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

On a p. p. sur $]0, T[$ les estimations

$$(2.151) \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Psi\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$(2.152) \quad \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u_0 + f(0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s) + \Delta \Psi \right\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

En particulier $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0, T; H_0^1(\Omega))$ si $\frac{\partial f}{\partial t} \in L^p(0, T; H^{-1}(\Omega))$, où $2 \leq p \leq +\infty$.

Démonstration. — On applique la proposition II.9 dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $a(u, v) = \sum_i \int \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$ et on prend pour φ la fonction indicatrice du (cône) convexe fermé

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega\}.$$

L'hypothèse (2.138) [et même (2.131)] est vérifiée puisque, grâce à (2.145), on a

$$a(u_0, v - \Psi) \geq (f(0), v - \Psi), \quad \forall v \in K.$$

Le problème (2.148)-(2.150) admet donc une solution telle que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. L'estimation (2.151) résulte de la remarque II.21. Pour établir la régularité en x et (2.152) on introduit la solution u_ε de l'équation

$$\begin{aligned} u_\varepsilon - \varepsilon \Delta u_\varepsilon &= u - \varepsilon t \Delta \Psi && \text{sur } \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0 && \text{sur } \Gamma. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ il est immédiat que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

et que

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \varepsilon \Delta \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta \Psi.$$

Grâce au principe du maximum, on a

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \geq \Psi \quad \text{p. p. sur } \Omega \times]0, T[.$$

Par conséquent ⁽²⁴⁾ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(u_\varepsilon(t) - u(t)) - \frac{1}{2} a(u_\varepsilon(0) - u_0) &= \int_0^t a\left(u_\varepsilon - u, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &\leq \int_0^t a\left(u_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds - \int_0^t \left(f, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &= - \int_0^t \int_\Omega (f + \Delta u_\varepsilon) \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) dx ds \\ &= - \varepsilon \int_0^t \int_\Omega (f + \Delta u_\varepsilon) \left(\Delta \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \Psi\right) dx ds. \end{aligned}$$

Pour simplifier, posons $z_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon + f$.

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\varepsilon} a(u_\varepsilon(t) - u(t)) - \frac{1}{2\varepsilon} a(u_\varepsilon(0) - u_0) &\leq - \int_0^t \int_\Omega z_\varepsilon \left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t} - \Delta \Psi\right) dx ds \\ &\leq - \frac{1}{2} \|z_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|z_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|z_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial f}{\partial t} + \Delta \Psi \right\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|z_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|z_\varepsilon(0)\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{a(u_\varepsilon(0) - u_0)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial t} + \Delta \Psi \right\|_{L^2(\Omega)} ds.$$

Le passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est immédiat et conduit à (2.152); en effet, $u_\varepsilon(t) \rightarrow u(t)$ dans $L^2(\Omega)$, $z_\varepsilon(0) \rightarrow \Delta u_0 + f(0)$ dans $L^2(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} a(u_\varepsilon(0) - u_0) &= \frac{1}{\varepsilon} (A u_\varepsilon(0) - A u_0, u_\varepsilon(0) - u_0) = \frac{1}{\varepsilon} (A u_\varepsilon(0) - A u_0, -\varepsilon A u_\varepsilon(0)) \\ &\leq \|A u_\varepsilon(0) - A u_0\|_{L^2(\Omega)} \|A u_0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Exemple 2. — Soit j une fonction convexe s. c. i. de $\mathbf{R}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $j \not\equiv +\infty$ et soit $\beta = \partial j$.

On suppose que

$$(2.153) \quad f \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(2.154) \quad u_0 \in H^2(\Omega) \quad \text{et} \quad -\Delta u_0 + u_0 = f(0) \quad \text{p. p. sur } \Omega,$$

$$(2.155) \quad \text{il existe } v_1 \in H^{1/2}(\Gamma) \quad \text{tel que} \quad -\frac{\partial u_0}{\partial n} \in \beta(v_1) \quad \text{p. p. sur } \Gamma.$$

⁽²⁴⁾ On pose $a(u) = a(u, u)$.

THÉORÈME II.14. — On fait les hypothèses (2.153)-(2.155); alors il existe une fonction unique u vérifiant

$$(2.156) \quad u \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega)),$$

$$(2.157) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$(2.158) \quad -\Delta u + u = f \quad \text{p. p. sur } \Omega \times]0, T[,$$

$$(2.159) \quad -\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \quad \text{p. p. sur } \Gamma \times]0, T[,$$

$$(2.160) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

On a p. p. sur $]0, T[$ l'estimation

$$(2.161) \quad \|u(t)\|_{W^1(\Omega)} \leq C \left(\|u_0\|_{W^1(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds \right).$$

De plus si $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, alors $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

Démonstration. — On applique la proposition II.9 dans l'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$a(u, v) = \sum_i \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx$$

et on prend

$$\varphi(u) = \int_{\Gamma} j(u) d\Gamma.$$

Soit $u_1 \in H^1(\Omega)$ tel que $u_1|_{\Gamma} = \varphi_1$; l'hypothèse (2.138) est satisfaite puisque l'inégalité

$$a(u_0, v - u_1) + \int_{\Gamma} j(v) d\Gamma - \int_{\Gamma} j(u_1) d\Gamma \geq (f(0), v - u_1), \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

résulte de (2.154)-(2.155).

Le problème (2.158)-(2.160) admet donc une solution telle que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Pour prouver la régularité en x et (2.161) on régularise j par j_ε comme au paragraphe I.2.1 et f par f_ε tel que

$$\frac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad f_\varepsilon \rightarrow f \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Soit u_ε la solution du problème :

$$(2.162) \quad -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = f_\varepsilon \quad \text{p. p. sur } \Omega \times]0, T[,$$

$$(2.163) \quad -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \beta_\varepsilon \left(\frac{\partial^+ u_\varepsilon}{\partial t} \right) \quad \text{p. p. sur } \Gamma \times]0, T[,$$

$$(2.164) \quad u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

Pour tout $t \in [0, T]$, $\frac{\partial^+ u_\varepsilon}{\partial t} \in H^1(\Omega)$, $\frac{\partial^+ u_\varepsilon}{\partial t} \Big|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$ et donc $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \in H^{1/2}(\Gamma)$; par suite, $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$. On établit (2.161) en procédant par cartes locales comme au paragraphe I.2.2. Pour simplifier l'exposé, on suppose que

$$\Omega = \{x = (x', x_N); x_N > 0\}$$

et on supprime l'indice ε .

Soit

$$\nabla u(x) = \frac{u(x + he_j) - u(x)}{h}, \quad \nabla^* u(x) = \frac{u(x - he_j) - u(x)}{h} \quad (1 \leq j \leq N-1).$$

On multiplie (2.162) par $\nabla^* \nabla \left(\frac{\partial^+ u}{\partial t} \right)$ et on intègre par parties; il vient pour tout $t \in [0, T]$,

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \nabla^* \nabla \left(\frac{\partial^+ u}{\partial t} \right) d\Gamma + a \left(u, \nabla^* \nabla \left(\frac{\partial^+ u}{\partial t} \right) \right) dx = \int_\Omega f \cdot \nabla^* \nabla \left(\frac{\partial^+ u}{\partial t} \right) dx.$$

Soit

$$-\int_\Gamma \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \nabla \left(\frac{\partial^+ u}{\partial t} \right) d\Gamma + a \left(\nabla u, \frac{\partial^+}{\partial t} \nabla u \right) = \int_\Omega f \cdot \nabla^* \nabla \left(\frac{\partial^+ u}{\partial t} \right) dx.$$

Or $-\nabla \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \nabla \left(\frac{\partial^+ u}{\partial t} \right) \geq 0$ grâce à (2.163) et à la monotonie de β . Donc

$$(2.165) \quad \frac{\partial^+}{\partial t} \frac{1}{2} a(\nabla u, \nabla u) \leq \frac{\partial^+}{\partial t} \int_\Omega f \cdot \nabla^* \nabla u \, dx - \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t} \nabla^* \nabla u \, dx.$$

On intègre (2.165) sur $]0, t[$ et après passage à la limite quand $h \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(t), \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) \\ & \leq - \int_\Omega f(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t) \, dx + \int_\Omega f(x, 0) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j^2} \, dx + \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \, dx \, ds. \end{aligned}$$

D'où, en particulier :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t) + f(x, t) \right|^2 dx \\ & \leq \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f(x, 0)|^2 dx + \int_{\Omega} f(x, 0) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j^2} dx \\ & \quad + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + f \right) dx ds. \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $t \in [0, T[$,

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t) + f(x, t) \right|^2 dx \leq C \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

Enfin, le passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est immédiat.

(C) PROBLÈMES AVEC CONTRAINTES UNILATÉRALES SUR $\frac{du}{dt}$ DU TYPE

$$\left(\frac{du}{dt}, v - \frac{du}{dt} \right) + a \left(u, v - \frac{du}{dt} \right) + \varphi(v) - \varphi \left(\frac{du}{dt} \right) \geq \left(f, v - \frac{du}{dt} \right).$$

Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ deux espaces de Hilbert tels que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$$

avec injections continues et denses; soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, *symétrique*, continue et coercive sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Soit φ une fonction convexe s. e. i. de $\mathcal{V}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$.

THÉORÈME II.15. — Soit $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ avec $\frac{df}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$. Soit $u_0 \in \mathcal{V}$; on fait l'hypothèse suivante :

(2.166) il existe $u_1 \in D(\varphi)$ (unique) tel que

$$(u_1, v - u_1) + a(u_0, v - u_1) + \varphi(v) - \varphi(u_1) \geq (f(0), v - u_1), \quad \forall v \in D(\varphi).$$

Alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; \mathcal{V})$ vérifiant

$$(2.167) \quad \frac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{V}') \quad \text{et} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} \in L^2(0, T; \mathcal{H}),$$

$$(2.168) \quad \left(\frac{du}{dt}, v - \frac{du}{dt} \right) + a \left(u, v - \frac{du}{dt} \right) + \varphi(v) - \varphi \left(\frac{du}{dt} \right) \geq \left(f, v - \frac{du}{dt} \right),$$

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall v \in D(\varphi),$$

$$(2.169) \quad u(0) = u_0.$$

On a de plus les estimations

$$(2.170) \quad \left(\int_0^T \left| \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^T \left| \frac{df}{dt} \right|^2 dt \right)^{1/2} + \sqrt{a(u_1)} \quad (2^5),$$

$$(2.171) \quad a \left(\frac{du}{dt}(t) \right) \leq a(u_1) + \frac{1}{2} \int_0^t \left| \frac{df}{ds}(s) \right|^2 ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Démonstration. — On peut supposer que $\frac{d^2 f}{dt^2} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ (le cas général s'en déduit en régularisant f).

Soit $\tilde{\varphi}(u) = \frac{1}{2} |u|^2 + \varphi(u)$; appliquant le théorème II.12 à $\tilde{\varphi}$ dans $\mathcal{V}$ on voit qu'il existe $u \in C([0, T]; \mathcal{V})$ tel que $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; \mathcal{V})$ u est dérivable à droite en tout $t \in [0, T[$,

$$(2.172) \quad \begin{cases} a \left(u, v - \frac{d^+ u}{dt} \right) + \tilde{\varphi}(v) - \tilde{\varphi} \left(\frac{d^+ u}{dt} \right) \geq \left(f, v - \frac{d^+ u}{dt} \right), \\ \forall t \in [0, T[, \quad \forall v \in D(\tilde{\varphi}); \end{cases}$$

$$(2.173) \quad u(0) = u_0.$$

Il en résulte que (2^6) :

$$(2.174) \quad \begin{aligned} & \left(\frac{d^+ u}{dt}, v - \frac{d^+ u}{dt} \right) + a \left(u, v - \frac{d^+ u}{dt} \right) + \varphi(v) - \varphi \left(\frac{d^+ u}{dt} \right) \\ & \geq \left(f, v - \frac{d^+ u}{dt} \right), \quad \forall t \in [0, T[, \quad \forall v \in D(\varphi). \end{aligned}$$

Notons que l'on a nécessairement (par unicité) $\frac{d^+ u}{dt}(0) = u_1$.

On reporte $v = u(t+h)$ dans (2.174); on applique ensuite (2.174) en $t+h$ et on y reporte $v = u(t)$.

Posons

$$v(t) = \frac{u(t+h) - u(t)}{h};$$

après addition, il vient

$$(2.175) \quad \left| \frac{d^+ v}{dt} \right|^2 + a \left(v, \frac{d^+ v}{dt} \right) \leq \left(\frac{f(t+h) - f(t)}{h}, \frac{d^+ v}{dt} \right), \quad \forall t \in [0, T-h].$$

Intégrant (2.175) sur $]0, T-h[$ on a

$$\int_0^{T-h} \left| \frac{d^+ v}{dt} \right|^2 dt \leq \frac{1}{2} a \left(\frac{u(h) - u_0}{h} \right) + \int_0^{T-h} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \cdot \left| \frac{d^+ v}{dt} \right| dt.$$

⁽²⁵⁾ On pose $a(u) = a(u, u)$.

⁽²⁶⁾ Utiliser l'égalité $\partial \tilde{\varphi} = I + \partial \varphi$ où les sous-différentiels sont entendus au sens de la dualité $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$.

Passant à la limite quand $h \rightarrow 0$ on obtient $\frac{d^2 u}{dt^2} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ ainsi que (2.170). D'autre part, on a

$$\frac{1}{2} a\left(\frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right) \leq \frac{1}{2} a\left(\frac{u(h) - u_0}{h}\right) + \frac{1}{4} \int_0^t \left| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right|^2 ds;$$

d'où (2.171).

REMARQUE II.23. — Si l'on remplace dans le théorème II.15 l'hypothèse $f, \frac{df}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ par $f, \frac{df}{dt}, \frac{d^2 f}{dt^2} \in L^1(0, T; \mathcal{V}')$, alors le problème (2.168)-(2.169) admet une solution vérifiant (2.167).

En effet, on sait déjà (grâce au théorème II.12) que $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; \mathcal{V})$. Formellement, on obtient une estimation sur $\frac{d^2 u}{dt^2}$ dans $L^2(0, T; \mathcal{H})$ en notant que

$$\left| \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a\left(\frac{du}{dt}\right) \leq \left(\frac{df}{dt}, \frac{d^2 u}{dt^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt}, \frac{du}{dt} \right) - \left(\frac{d^2 f}{dt^2}, \frac{du}{dt} \right).$$

Donc

$$\int_0^T \left| \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^2 dt \leq \frac{1}{2} a(u_1) + \left(\frac{df}{dt}(T), \frac{du}{dt}(T) \right) - \left(\frac{df}{dt}(0), u_1 \right) - \int_0^T \left(\frac{d^2 f}{dt^2}, \frac{du}{dt} \right) dt.$$

REMARQUE II.24. — Comme en (B), on pourrait étudier de manière plus détaillée le problème (2.168)-(2.169) sur des exemples. La régularité en x (qui était le point délicat dans les théorèmes II.13 et II.14) n'est pas difficile à établir. En effet, (2.168) s'écrit

$$a\left(u, v - \frac{du}{dt}\right) + \varphi(v) - \varphi\left(\frac{du}{dt}\right) \geq \left(g, v - \frac{du}{dt}\right),$$

avec

$$g = f - \frac{du}{dt}, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{df}{dt} - \frac{d^2 u}{dt^2} \in L^2(0, T; \mathcal{H}).$$

On peut alors se ramener aux théorèmes II.13 ou II.14.

Le résultat suivant permet de s'affranchir de l'hypothèse (2.166) qui est assez restrictive dans les applications.

PROPOSITION II.10. — Soit $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ avec $\frac{df}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Soit $u_0 \in \mathcal{V}$; alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; \mathcal{V})$ vérifiant

$$(2.176) \quad \frac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{V}_f) \cap L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \frac{d^2 u}{dt^2} \in L^2(\delta, T; \mathcal{H}), \quad \forall \delta \in]0, T[,$$

$$(2.177) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{du}{dt}, v - \frac{du}{dt} \right) + a \left(u, v - \frac{du}{dt} \right) + \varphi(v) - \varphi \left(\frac{du}{dt} \right) \geq \left(f, v - \frac{du}{dt} \right), \\ & \forall t \in]0, T], \quad \forall v \in D(\varphi), \end{aligned} \right.$$

$$(2.178) \quad u(0) = u_0.$$

On utilisera dans la démonstration le lemme suivant :

LEMME II.7. — Soit M un graphe maximal monotone dans $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$. Alors $R(I + M)$ est dense dans $\mathcal{V}'$.

Démonstration du lemme II.7. — Soient $v_0 \in D(M)$ et $g_0 \in M v_0$. On pose $\tilde{M}v = Mv - g_0$; il suffit alors de montrer que $R(I + \tilde{M})$ est dense dans $\mathcal{V}'$. Soit $f \in \mathcal{H}$ et soit u_ε la solution de l'équation $u_\varepsilon + \tilde{M}u_\varepsilon + \varepsilon A u_\varepsilon \ni f$. Appliquant la monotonie de $\tilde{M}$ en u_ε et v_0 on a

$$(f - u_\varepsilon - \varepsilon A u_\varepsilon, u_\varepsilon - v_0) \geq 0.$$

Donc

$$\varepsilon \|u_\varepsilon\|^2 + \|u_\varepsilon\|^2 \leq \varepsilon \|u_\varepsilon\| \|v_0\| + \|u_\varepsilon\| \|v_0\| + \|f\| \|u_\varepsilon\| + \|f\| \|v_0\|.$$

Par conséquent $\varepsilon \|u_\varepsilon\|^2$ est borné et $\varepsilon A u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $\mathcal{V}'$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On en déduit que $f \in \overline{R(I + \tilde{M})}^{\mathcal{V}'}$.

Démonstration de la proposition II.10. — Le problème (2.177)-(2.178) s'écrit encore :

$$\begin{aligned} & a \left(u, v - \frac{du}{dt} \right) + \tilde{\varphi}(v) - \tilde{\varphi} \left(\frac{du}{dt} \right) \geq a \left(g, v - \frac{du}{dt} \right), \\ & u(0) = u_0, \end{aligned}$$

où $\tilde{\varphi}(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 + \varphi(u)$ et $A g = f$.

Posant $w = g - u$, on a

$$\frac{dw}{dt} + \partial \tilde{\varphi}^*(w) \ni \frac{dg}{dt}, \quad w(0) = g(0) - u_0,$$

où $\tilde{\varphi}^*$ est la fonction convexe conjuguée de $\tilde{\varphi}$ dans $\mathcal{V}$ et $\partial \tilde{\varphi}^*$ est le sous-différentiel de $\tilde{\varphi}^*$ dans $\mathcal{V}$. Notons que $D(\partial \tilde{\varphi}^*)$ est dense dans $\mathcal{V}$.

En effet, soit $\partial \varphi$ le sous-différentiel de φ dans la dualité entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$; il est immédiat que $D(\partial \varphi^*) = \overline{AR(I + \partial \varphi)}^{-1}$ et $R(I + \partial \varphi)$ est dense

dans $\mathcal{V}'$ d'après le lemme II.7. Utilisant le théorème II.5 on voit alors qu'il existe $u \in C([0, T]; \mathcal{V})$ unique tel que $\frac{du}{dt} \in D(\varphi)$ p. p. sur $]0, T[$, $\frac{du}{dt} \in L^2(\delta, T; \mathcal{V})$, $\forall \delta \in]0, T[$,

$$\left(\frac{du}{dt}, v - \frac{du}{dt} \right) + a \left(u, v - \frac{du}{dt} \right) + \varphi(v) - \varphi \left(\frac{du}{dt} \right) \geq \left(f, v - \frac{du}{dt} \right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[,$$

$$\forall v \in D(\varphi); u(0) = u_0.$$

On déduit du théorème II.15 que

$$\frac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{V}_f) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} \in L^2(\delta, T; \mathcal{H}), \quad \forall \delta \in]0, T[.$$

Enfin on obtient aisément par intégration de (2.177) que $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

II.3. — Problème périodique

Les résultats sont très semblables à ceux concernant le problème de Cauchy; nous indiquons rapidement comment on peut adapter les méthodes des paragraphes II.2.1 et II.2.2.

EXISTENCE, UNICITÉ ET PROPRIÉTÉS DE LA SOLUTION FAIBLE. — On reprend les notations du paragraphe II.2.1 et on cherche à résoudre les inéquations variationnelles de la forme

$$(3.1) \quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dt} + A u, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u) & \text{p. p. sur }]0, T[; \\ u(0) = u(T). \end{cases}$$

En intégrant (3.1) sur $]0, T[$ on obtient

$$(3.2) \quad \begin{cases} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + A u, v - u \right) dt + \int_0^T \varphi(v) dt - \int_0^T \varphi(u) dt \geq \int_0^T (f, v - u) dt, \\ \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V'; \quad \text{et} \quad v(0) = v(T). \end{cases}$$

On est alors conduit à introduire dans $V \times V'$ le graphe M_p ; on dit que $f \in M_p(u)$ si et seulement si $f \in V'$ et $u \in D(\Phi)$ vérifient

$$(3.3) \quad \begin{cases} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt, \\ \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V' \quad \text{et} \quad v(0) = v(T). \end{cases}$$

Avec cette notation le problème (3.2) s'écrit $M_p(u) + A u \ni f$.

Une des propriétés essentielles de M_p est la suivante :

THÉORÈME II.16. — M_p est maximal monotone dans $V \times V'$.

La démonstration est basée sur le lemme suivant :

LEMME II.8. — Soient $u \in D(\Phi)$ et $g \in V'$; alors on a

$$\inf \left\{ \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} - g, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \leq 0; \right. \\ \left. v \in D(\Phi), \frac{dv}{dt} \in V', v(0) = v(T) \right\}.$$

Démonstration du lemme II.8. — Soit u_ε la solution de l'équation

$$(3.4) \quad u_\varepsilon + \varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dt} = u, \quad u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(T).$$

Autrement dit :

$$u_\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} z_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\varepsilon}} u(s) ds,$$

avec

$$z_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}} \right)} \int_0^T e^{-\frac{s-T}{\varepsilon}} u(s) ds.$$

Il est immédiat que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans V quand $\varepsilon \rightarrow 0$; en effet, on sait que $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\varepsilon}} u(s) ds \rightarrow u$ dans V et d'autre part :

$$\left\| e^{-\frac{t}{\varepsilon}} z_\varepsilon \right\|_V \leq \frac{1}{p} \frac{1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon} p}}{1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}}} \int_0^T e^{-\frac{s-T}{\varepsilon}} \|u(s)\| ds \rightarrow 0.$$

De plus, $u_\varepsilon \in D(\Phi)$ et $\Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u)$; car on a

$$(3.5) \quad \varphi(u_\varepsilon(t)) \leq e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \varphi(z_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{s-t}{\varepsilon}} \varphi(u(s)) ds$$

et

$$\varphi(z_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}} \right)} \int_0^T e^{-\frac{s-T}{\varepsilon}} \varphi(u(s)) ds.$$

Par ailleurs, soit η_ε la solution de l'équation

$$(3.6) \quad \eta_\varepsilon + \varepsilon \frac{d\eta_\varepsilon}{dt} = \varphi(u), \quad \eta_\varepsilon(0) = \eta_\varepsilon(T);$$

autrement dit :

$$\eta_\varepsilon(t) = e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \zeta_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}} \varphi(u(s)) ds,$$

avec

$$\zeta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{T}{\varepsilon}}\right)} \int_0^T e^{\frac{s-T}{\varepsilon}} \varphi(u(s)) ds.$$

Par conséquent, on a

$$(3.7) \quad \varphi(u_\varepsilon(t)) \leq \eta_\varepsilon(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Par intégration de (3.6), il vient

$$\int_0^T \eta_\varepsilon(t) dt = \int_0^T \varphi(u(t)) dt, \quad \text{d'où} \quad \Phi(u_\varepsilon) \leq \Phi(u).$$

Enfin :

$$\int_0^T \left(\frac{du_\varepsilon}{dt} - g, u_\varepsilon - u \right) dt + \Phi(u_\varepsilon) - \Phi(u) \leq - \int_0^T (g, u_\varepsilon - u) dt.$$

Démonstration du théorème II.16. — Comme dans la démonstration du théorème II.2 on prouve à l'aide du lemme II.8 que M_p est monotone. D'autre part, on sait que pour tout $f \in V'$, il existe $u \in D(\Phi)$ tel que

$$(3.8) \quad \begin{cases} \int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + F u, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt, \\ \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V' \quad \text{et} \quad v(0) = v(T) \end{cases}$$

[utiliser le théorème II.1 avec

$$L = \frac{d}{dt}, \quad D(L) = \left\{ v \in V, \frac{dv}{dt} \in V', v(0) = v(T) \right\} \quad \text{et} \quad A u = F u - f \Big].$$

Il en résulte que $M_p + F$ est surjectif et donc M_p est maximal monotone.

THÉORÈME II.17. — Soit $f \in M_p(u)$; alors $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ et $u(0) = u(T)$.

De plus, pour tout $v \in D(\Phi)$ tel que $\frac{dv}{dt} \in V'$, la fonction $t \mapsto |u(t) - v(t)|^2$ est à variation bornée et on a l'inéquation « ponctuelle » :

$$(3.9) \quad -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u - v|^2 + \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)$$

au sens des mesures sur $]0, T[$.

D'autre part, si $f_1 \in M_p(u_1)$ et $f_2 \in M_p(u_2)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |u_1(t) - u_2(t)|^2 &\leq \frac{1}{e^{\lambda T} - 1} \int_0^T (f_1 - f_2, u_1 - u_2) e^{\lambda s} ds \\ &\quad + \frac{\lambda}{2(e^{\lambda T} - 1)} \int_0^T |u_1 - u_2|^2 e^{\lambda s} ds \\ &\quad + \int_0^t (f_1 - f_2, u_1 - u_2) ds, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

On utilisera dans la démonstration le lemme suivant :

LEMME II.9. — Soit $f \in H$ et soit $u \in D(\Phi)$ la solution de (3.8). Alors on a $\frac{du}{dt} \in H$, $u(0) = u(T)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt} + F u, v - u \right) + \varphi(v) - \varphi(u) &\geq (f, v - u), \\ \forall v \in D(\Phi) \quad \text{p. p. sur }]0, T[. \end{aligned}$$

Démonstration du lemme II.9. — Reportant dans (3.8), $v = u_\varepsilon$ solution de (3.4), on obtient

$$\varepsilon \int_0^T \left| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right|^2 dt + \frac{\varepsilon}{p} \|u_\varepsilon(T)\|^p - \frac{\varepsilon}{p} \|u_\varepsilon(0)\|^p + \Phi(u) - \Phi(u_\varepsilon) \leq \varepsilon \int_0^T \left(f, \frac{du_\varepsilon}{dt} \right) dt.$$

Donc

$$\int_0^T \left| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right|^2 dt \leq \int_0^T \left(f, \frac{du_\varepsilon}{dt} \right) dt.$$

Il en résulte que $\frac{du_\varepsilon}{dt}$ demeure borné dans H et par conséquent $\frac{du}{dt} \in H$ avec $u(0) = u(T)$.

On achève ensuite comme dans la démonstration du lemme II.3.

Démonstration du théorème II.17. — On pose $g = f + u + F u$ et soit $g_n \in H$ tel que $g_n \rightarrow g$ dans V' . Grâce au lemme II.9, il existe $u_n \in D(\Phi)$ tel que $\frac{du_n}{dt} \in H$ vérifiant

$$(3.10) \quad \begin{cases} \left(\frac{du_n}{dt} + u_n + F u_n, v - u_n \right) + \varphi(v) - \varphi(u_n) \geq (g_n, v - u_n), \\ \forall v \in D(\Phi), \quad \text{p. p. sur }]0, T[; \\ u_n(0) = u_n(T). \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\lim u_n = u$ dans V faible, $\lim F u_n = F u$ dans V' faible :

$$\lim \int_{t_1}^{t_2} (F u_n, u_n) dt = \int_{t_1}^{t_2} (F u, u) dt, \quad \forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

Montrons que $\lim u_n = u$ dans $C([0, T]; \mathcal{H})$; en effet, on a

$$(3.11) \quad \left(\frac{du_n}{dt} + u_n + F u_n, u_m - u_n \right) + \varphi(u_m) - \varphi(u_n) \geq (g_n, u_m - u_n),$$

$$(3.12) \quad \left(\frac{du_m}{dt} + u_m + F u_m, u_n - u_m \right) + \varphi(u_n) - \varphi(u_m) \geq (g_m, u_n - u_m).$$

On multiplie (3.11) et (3.12) par $e^{\lambda t}$ et on intègre sur $]0, T[$; après addition, il vient

$$(3.13) \quad \frac{1}{2} |u_n(0) - u_m(0)|^2 (e^{\lambda T} - 1) \leq \left(\frac{\lambda}{2} - 1 \right) \int_0^T |u_n - u_m|^2 e^{\lambda t} dt \\ + \int_0^T (g_n - g_m, u_n - u_m) e^{\lambda t} dt \leq e^{\lambda T} \|g_n - g_m\|_{V'} \|u_n - u_m\|_V,$$

pourvu que $0 < \lambda < 2$.

D'autre part, on a

$$(3.14) \quad \frac{1}{2} |u_n(t) - u_m(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |u_n(0) - u_m(0)|^2 + \int_0^t (g_n - g_m, u_n - u_m) ds.$$

Combinant (3.13) et (3.14) on voit que $\lim u_n = u$ dans $C([0, T]; \mathcal{H})$. Enfin (3.10) implique

$$\frac{1}{2} |u_n(t_1) - v(t_1)|^2 - \frac{1}{2} |u_n(t_2) - v(t_2)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt} + u_n + F u_n, v - u_n \right) dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \varphi(v) dt - \int_{t_1}^{t_2} \varphi(u_n) dt \geq \int_{t_1}^{t_2} (g_n, v - u_n) dt, \\ \forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T; \quad \forall v \in D(\Phi), \quad \frac{dv}{dt} \in V'.$$

Passant à la limite on obtient (3.9).

Démontrons maintenant la seconde partie du théorème II.17.

Soient $f_1 \in M_p(u_1)$ et $(f_2) \in M_p(u_2)$. On sait déjà grâce au théorème II.3 que

$$\frac{1}{2} |u_1(t) - u_2(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |u_1(0) - u_2(0)|^2 + \int_0^t (f_1 - f_2, u_1 - u_2) ds.$$

Il reste donc $|u_1(0) - u_2(0)|^2$ à estimer; on a

$$(3.15) \quad -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_1 - v|^2 + \left(\frac{dv}{dt}, v - u_1 \right) + \varphi(v) - \varphi(u_1) \geq (f_1, v - u_1),$$

$$(3.16) \quad -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_2 - v|^2 + \left(\frac{dv}{dt}, v - u_2 \right) + \varphi(v) - \varphi(u_2) \geq (f_2, v - u_2)$$

au sens des mesures sur $]0, T[$, $\forall v \in D(\Phi); \frac{dv}{dt} \in V'$.

Posons $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$; on ajoute (3.15) et (3.16). Après multiplication par $e^{\lambda t}$ et intégration sur $]0, T[$ il vient

$$(3.17) \quad \frac{1}{2}(e^{\lambda T} - 1) [|u_1(0) - v(0)|^2 + |u_2(0) - v(0)|^2] \leq 2 \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) e^{\lambda t} dt \\ + 2 \int_0^T \left(\frac{dv}{dt}, v - u \right) e^{\lambda t} dt + 2 \int_0^T \varphi(v) e^{\lambda t} dt - 2 \int_0^T \varphi(u) e^{\lambda t} dt \\ - \int_0^T (f_1 + f_2, v - u) e^{\lambda t} dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^T [|u_1 - v|^2 + |u_2 - v|^2] e^{\lambda t} dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T (f_1 - f_2, u_1 - u_2) e^{\lambda t} dt, \\ \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V' \quad \text{et} \quad v(0) = v(T).$$

De plus :

$$\frac{1}{4} |u_1(0) - u_2(0)|^2 \leq \frac{1}{2} |u_1(0) - v(0)|^2 + \frac{1}{2} |u_2(0) - v(0)|^2.$$

Reportant dans (3.17), $v = u_\varepsilon$ solution de (3.4) et passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient

$$\frac{1}{4}(e^{\lambda T} - 1) |u_1(0) - u_2(0)|^2 \leq \frac{\lambda}{4} \int_0^T |u_1 - u_2|^2 e^{\lambda t} dt + \frac{1}{2} \int_0^T (f_1 - f_2, u_1 - u_2) e^{\lambda t} dt.$$

On notera que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans V et

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \varphi(u_\varepsilon) e^{\lambda t} dt \leq \int_0^T \varphi(u) e^{\lambda t} dt.$$

En effet, on a grâce à (3.7), $\varphi(u_\varepsilon(t)) \leq \eta_\varepsilon(t)$ et $\eta_\varepsilon \rightarrow \varphi(u)$ dans $L^1(0, T)$.

COROLLAIRE II.3. — Soit $A : \overline{D(\Phi)} \rightarrow V'$ un opérateur pseudomonotone et borné; on suppose qu'il existe $v_0 \in D(\Phi)$ tel que $\frac{dv_0}{dt} \in V'$, $v_0(0) = v_0(T)$ et

$$\lim_{\substack{\|v\| \rightarrow +\infty \\ v \in D(\Phi)}} \frac{\int_0^T (A v, v - v_0) dt + \Phi(v)}{\|v\|} = +\infty.$$

Alors pour tout $f \in V'$ il existe $u \in D(\Phi) \cap C([0, T]; \mathcal{H})$ vérifiant

$$\int_0^T \left(\frac{dv}{dt} + A u, v - u \right) dt + \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_0^T (f, v - u) dt, \\ \forall v \in D(\Phi); \quad \frac{dv}{dt} \in V' \quad \text{et} \quad v(0) = v(T).$$

De plus on a $u(0) = u(T)$.

THÉORÈMES DE RÉGULARITÉ. — Nous nous bornons à indiquer l'analogie périodique des théorèmes II.4 et II.5 qui sont les résultats de base. L'application aux inéquations d'évolution se fait ensuite exactement comme aux paragraphes II.2.3 et II.2.4.

Soit X un espace de Banach uniformément convexe ainsi que son dual X' . Soit M un opérateur m -accrétif de X dans X .

THÉORÈME II.18. — Soit $f \in C([0, T]; X)$ avec $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; X)$ et $f(0) = f(T)$. Soit $\omega > 0$.

Alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; X)$ vérifiant

$$(3.18) \quad u \text{ est dérivable à droite en tout } t \in [0, T[,$$

$$(3.19) \quad \frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; X),$$

$$(3.20) \quad u(t) \in D(M), \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(3.21) \quad \frac{d^+ u}{dt} + (Mu(t) + \omega u(t) - f(t))^0 = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(3.22) \quad u(0) = u(T).$$

Démonstration. — On considère l'équation approchée

$$(3.23) \quad \begin{cases} \frac{du_\varepsilon}{dt} + M_\varepsilon u_\varepsilon + \omega u_\varepsilon = f, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(T) \quad \text{où} \quad M_\varepsilon = \frac{I - (I + \varepsilon M)^{-1}}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \end{cases}$$

L'équation (3.23) admet une solution de classe C^1 ; on notera, par exemple, que l'application $S(T)$ qui à v_0 fait correspondre $v_\varepsilon(T)$ où v_ε est la solution de l'équation

$$\frac{dv_\varepsilon}{dt} + M_\varepsilon v_\varepsilon + \omega v_\varepsilon = f, \quad v_\varepsilon(0) = v_0,$$

vérifie

$$\|S(T)v_0 - S(T)v_0\| \leq e^{-\omega T} \|v_0 - v_0\|, \quad \forall v_0, v_0 \in X$$

et admet donc un point fixe.

ESTIMATIONS. — Soit F l'application de dualité de X dans X' . Dérivant (3.23), on a

$$(3.24) \quad \frac{d^2 u_\varepsilon}{dt^2} + \frac{d}{dt}(M_\varepsilon u_\varepsilon) + \omega \frac{du_\varepsilon}{dt} = \frac{df}{dt} \quad \text{p. p. sur }]0, T[.$$

Multipliant (3.24) par $F\left(\frac{du_\varepsilon}{dt}\right)$ et intégrant sur $]0, t[$ il vient

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt}(t) \right\|^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) \right\|^2 + \omega \int_0^t \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\|^2 ds \leq \int_0^t \left\| \frac{df}{dt} \right\| \cdot \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\| ds.$$

D'autre part en multipliant (3.23) par $e^{\lambda t} F\left(\frac{du_\varepsilon}{dt}\right)$ et intégrant sur $]0, T[$, on obtient

$$\frac{1}{2} (e^{\lambda T} - 1) \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) \right\|^2 + \left(\omega - \frac{\lambda}{2} \right) \int_0^T e^{\lambda t} \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\|^2 dt \leq \int_0^T e^{\lambda t} \left\| \frac{df}{dt} \right\| \cdot \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\| dt.$$

On notera que

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{dv}{dt} F(v) e^{\lambda t} dt &= \frac{1}{2} e^{\lambda T} \|v(T)\|^2 - \frac{1}{2} \|v(0)\|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_0^T e^{\lambda t} \|v\|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} (e^{\lambda T} - 1) \|v(0)\|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_0^T e^{\lambda t} \|v\|^2 dt \end{aligned}$$

si $v(0) = v(T)$.

Choisissant $0 < \lambda < 2\omega$ on voit que

$$\left\| \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) \right\|^2 \leq C_1 \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\|_{L^\infty(0, T; X)},$$

où C_1 est indépendant de ε .

Par suite,

$$\left\| \frac{du_\varepsilon}{dt}(t) \right\|^2 \leq C_1 \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\|_{L^\infty(0, T; X)} + 2 \int_0^t \left\| \frac{df}{dt} \right\| \cdot \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\| ds.$$

Il en résulte que

$$\left\| \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\|_{L^\infty(0, T; X)} \leq C_1 + 2 \int_0^T \left\| \frac{df}{dt} \right\| dt = C_2.$$

Enfin comme $(M + \omega)^{-1}$ est lipschitzien, u_ε demeure borné dans $L^\infty(0, T; X)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Donc

$$\|M_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; X)} \leq C_3.$$

PASSAGE A LA LIMITE. — Montrons que $u_\varepsilon(0)$ est de Cauchy quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On a

$$(3.25) \quad \frac{d}{dt}(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}) + M_\varepsilon u_\varepsilon - M_{\varepsilon'} u_{\varepsilon'} + \omega(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}) = 0.$$

Multipliant (3.25) par $e^{\lambda t} F(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'})$ et intégrant sur $]0, T[$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{\lambda T} - 1) \|u_\varepsilon(0) - u_{\varepsilon'}(0)\|^2 + \left(\omega - \frac{\lambda}{2}\right) \int_0^T e^{\lambda t} \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\|^2 dt \\ + \int_0^T (M_\varepsilon u_\varepsilon - M_{\varepsilon'} u_{\varepsilon'}, F(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'})) e^{\lambda t} dt = 0. \end{aligned}$$

Si $0 < \lambda < 2\omega$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(e^{\lambda T} - 1) \|u_\varepsilon(0) - u_{\varepsilon'}(0)\|^2 \\ \leq - \int_0^T (M_\varepsilon u_\varepsilon - M_{\varepsilon'} u_{\varepsilon'}, F(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'})) e^{\lambda t} dt \\ \leq \int_0^T \|M_\varepsilon u_\varepsilon - M_{\varepsilon'} u_{\varepsilon'}\| \cdot \|F(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}) - F(J_\varepsilon u_\varepsilon - J_{\varepsilon'} u_{\varepsilon'})\| e^{\lambda t} dt, \end{aligned}$$

où $J_\varepsilon = (I + \varepsilon M)^{-1}$.

Or

$$\|(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}) - (J_\varepsilon u_\varepsilon - J_{\varepsilon'} u_{\varepsilon'})\| \leq \varepsilon \|M_\varepsilon u_\varepsilon\| + \varepsilon' \|M_{\varepsilon'} u_{\varepsilon'}\| \leq C_3(\varepsilon + \varepsilon').$$

Il en résulte que $u_\varepsilon(0)$ est de Cauchy puisque F est uniformément continu sur les bornés de X . On pose $u_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(0)$; il est clair que $u_0 \in D(M)$ puisque $M_\varepsilon u_\varepsilon(0)$ est borné. Soit w_ε la solution de l'équation

$$\frac{dw_\varepsilon}{dt} + M_\varepsilon w_\varepsilon + \omega w_\varepsilon = f, \quad w_\varepsilon(0) = u_0.$$

D'une part, on a

$$\|u_\varepsilon(t) - w_\varepsilon(t)\| \leq e^{-\omega t} \|u_\varepsilon(0) - u_0\|.$$

D'autre part, on sait (cf. Kato [4]) que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon = u$ uniformément sur $[0, T]$ et u est la solution de l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d^+ u}{dt} + M u + \omega u &\ni f, \quad \forall t \in [0, T]; \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Par suite, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u$ uniformément sur $[0, T]$ et $u(0) = u(T)$.

Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et φ une fonction convexe s. c. i. de $\mathcal{H}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$; soit $M u = \partial \varphi(u)$.

THÉORÈME II.19. — Soient $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $\omega > 0$. Il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ vérifiant

$$(3.26) \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H});$$

$$(3.27) \quad u(t) \in D(M) \quad \text{p. p. sur }]0, T[;$$

(3.28) la fonction $t \mapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur $[0, T]$ et on a

$$\left| \frac{du}{dt} \right|^2 + \frac{d}{dt} \varphi(u) + \omega \frac{d}{dt} |u|^2 = \left(f, \frac{du}{dt} \right) \quad \text{p. p. sur }]0, T[;$$

$$(3.29) \quad \frac{du}{dt} + (Mu + \omega u - f)^0 = 0 \quad \text{p. p. sur }]0, T[;$$

$$(3.30) \quad u(0) = u(T).$$

Démonstration. — On considère l'application $S(T) : \overline{D(\varphi)} \rightarrow D(\varphi)$ qui à tout $v_0 \in \overline{D(\varphi)}$ fait correspondre $v(T)$ où v est la solution de l'équation

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + Mv + \omega v &\ni f \quad \text{p. p. sur }]0, T[; \\ v(0) &= v_0 \end{aligned}$$

(v existe d'après le théorème II.5).

Il est immédiat que

$$|S(T)v_0 - S(T)\hat{v}_0| \leq e^{-\omega T} |v_0 - \hat{v}_0|, \quad \forall v_0, \hat{v}_0 \in \overline{D(\varphi)}$$

et donc il existe $v_0 \in \overline{D(\varphi)}$ tel que $S(T)v_0 = v_0$. Notant que $v_0 \in D(\varphi)$ on achève la démonstration à l'aide du théorème II.5.

On a encore un résultat d'existence dans le cas où $\omega = 0$. Soit φ une fonction convexe s. c. i. de $\mathcal{H}$ dans $]-\infty, +\infty]$ telle que $\varphi \not\equiv +\infty$ et

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u)}{|u|} = +\infty; \text{ soit } M = \partial\varphi.$$

PROPOSITION II.11. — *Étant donné $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$, il existe une fonction $u \in C([0, T]; \mathcal{H})$ vérifiant (3.26)-(3.30) avec $\omega = 0$.*

Démonstration. — On considère pour $0 < \omega < 1$ la solution u_ω de l'équation approchée

$$(3.31) \quad \begin{cases} \frac{du_\omega}{dt} + Mu_\omega + \omega u_\omega \ni f & \text{p. p. sur }]0, T[; \\ u_\omega(0) = u_\omega(T). \end{cases}$$

Multipliant (3.31) par $\frac{du_\omega}{dt}$ et intégrant sur $]0, T[$ on a

$$\left(\int_0^T \left| \frac{du_\omega}{dt} \right|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^T |f|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Par ailleurs, u_ω demeure borné dans $L^\infty(0, T; \mathcal{H})$.

En effet, pour $\omega \in D(\varphi)$ fixé, on a

$$(3.32) \quad \varphi(v) - \varphi(u_\omega) \geq \left(f - \omega u_\omega - \frac{du_\omega}{dt}, v - u_\omega \right).$$

Intégrant (3.32) sur $]0, T[$ il vient

$$\int_0^T \varphi(u_\omega) dt \leq C_1 + \int_0^T (f, u_\omega) dt,$$

où C_1 est indépendant de ω .

D'autre part, pour tout N , il existe C tel que

$$\varphi(u) \geq N \|u\| - C, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Par conséquent :

$$N \int_0^T \|u_\omega\| dt \leq CT + C_1 + \int_0^T (f, u_\omega) dt.$$

On sait qu'il existe C_2 tel que

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{H})} \leq C_2 \left(\|u\|_{L^1(0, T; \mathcal{H})} + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T; \mathcal{H})} \right), \quad \forall u.$$

Il en résulte que

$$\|u_\omega\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{H})} \leq C_2 \left(\frac{CT + C_1}{N} + \frac{1}{N} \int_0^T (f, u_\omega) dt + \|f\|_{L^2(0, T; \mathcal{H})} \right).$$

Choissant $N > C_2 \int_0^T |f| dt$, on obtient une estimation indépendante de ω pour $\|u_\omega\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{H})}$.

PASSAGE A LA LIMITE QUAND $\omega \rightarrow 0$. — Soit $g_\omega \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ tel que $g_\omega \in M u_\omega$ et $\frac{du_\omega}{dt} + g_\omega + \omega u_\omega = f$ p. p. sur $]0, T[$. On considère une suite $\omega_n \rightarrow 0$ telle que $\lim u_{\omega_n} = u$, $\lim \frac{du_{\omega_n}}{dt} = \frac{du}{dt}$ et $\lim g_{\omega_n} = g$ dans $L^2(0, T; \mathcal{H})$ faible. On a $\frac{du}{dt} + g \ni f$ p. p. sur $]0, T[$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_0^T (g_{\omega_n}, u_{\omega_n} - u) dt &= \int_0^T \left(f - \omega_n u_{\omega_n} - \frac{du_{\omega_n}}{dt}, u_{\omega_n} - u \right) dt \\ &= \int_0^T \left(f - \omega_n u_{\omega_n} - \frac{du}{dt}, u_{\omega_n} - u \right) dt. \end{aligned}$$

On en conclut que $\lim \int_0^T (g_{\omega_n}, u_{\omega_n} - u) dt = 0$ et donc $g \in M u$ p. p. sur $]0, T[$ [noter que l'extension de M à $L^2(0, T; \mathcal{H})$ est maximale monotone et utiliser Brézis-Crandall-Pazy [1], lemme 1.2].

CHAPITRE III

PROBLÈMES UNILATÉRAUX ASSOCIÉS A DES OPÉRATEURS HYPERBOLIQUES

III.1. — Propriétés de la solution forte; régularité en t

Nous commençons par établir à l'aide des méthodes des semi-groupes non linéaires (cf. § II.2.2) l'existence et la régularité en t des solutions de problèmes unilatéraux associés à des opérateurs hyperboliques. Nous examinons ensuite sur divers exemples la régularité en x . Par passage à la limite nous obtenons l'existence et les propriétés des solutions faibles; nous prouvons enfin un résultat d'unicité pour les solutions faibles.

Soit $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ deux espaces de Hilbert tels que

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{V}'$$

avec injections continues et denses.

Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et *symétrique* sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$; on introduit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ défini par

$$(A u, v) = a(u, v) \quad \text{et} \quad a(u) = a(u, u).$$

On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que

$$a(u) + k \|u\|^2 \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall u \in \mathcal{V}; \quad \alpha > 0$$

et on pose

$$\sigma = \sup \left\{ \frac{k(u, v)}{a(u) + k \|u\|^2 + \|v\|^2}; u \in \mathcal{V}, v \in \mathcal{H}, \|u\| + \|v\| \neq 0 \right\} < +\infty.$$

Soit φ une fonction convexe s. c. i. de $\mathcal{V}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$.

THÉORÈME III.1. — Soit $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ avec $\frac{df}{dt} \in L^1(0, T; \mathcal{H})$; soient $u_0 \in \mathcal{V}$ et $v_0 \in D(\varphi)$. On fait l'hypothèse suivante ⁽²⁷⁾ :

(1.1) il existe $g_0 \in \mathcal{H}$ tel que

$$a(u_0, v - v_0) + \varphi(v) - \varphi(v_0) \geq (g_0, v - v_0), \quad \forall v \in D(\varphi).$$

Alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; \mathcal{V})$ vérifiant :

(1.2) u est dérivable à droite dans $\mathcal{V}$ en tout $t \in [0, T[$,

$\frac{du}{dt}$ est dérivable à droite dans $\mathcal{H}$ en tout $t \in [0, T[$;

$$(1.3) \quad \frac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{H}) \cap C([0, T]; \mathcal{V}_f), \quad \frac{d^2 u}{dt^2} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$$

et plus précisément :

$$\left[a\left(\frac{du}{dt}(t)\right) + k \left| \frac{du}{dt}(t) \right|^2 + \left| \frac{d^2 u}{dt^2}(t) \right|^2 \right]^{1/2} \leq e^{\sigma t} [a(v_0) + k |v_0|^2 + |g_0 - f(0)|^2]^{1/2} + \int_0^t e^{\sigma(t-s)} \left| \frac{df}{dt}(s) \right| ds;$$

$$(1.4) \quad \frac{du}{dt} \in D(\varphi), \quad \forall t \in [0, T];$$

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^+}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right), w - \frac{du}{dt} \right) + a\left(u, w - \frac{du}{dt}\right) + \varphi(w) - \varphi\left(\frac{du}{dt}\right) \geq \left(f, w - \frac{du}{dt}\right), \\ \forall w \in D(\varphi), \quad \forall t \in [0, T]; \end{array} \right.$$

$$(1.6) \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0.$$

REMARQUE III.1. — Le théorème III.1 rejoint un résultat antérieur de Brézis-Lions [1] qui était formulé de manière plus abstraite mais avec des conclusions moins précises.

Démonstration du théorème III.1. — Soit $\partial\varphi$ le sous-différentiel de φ dans la dualité entre $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$. Posant $\frac{du}{dt} = v$, (1.5) devient

$$\frac{d^+ v}{dt} + A u + \partial\varphi(v) \ni f.$$

On écrit le problème (1.5)-(1.6) sous la forme d'un système

$$\frac{d^+ U}{dt} + MU - \sigma U \ni F, \quad U(0) = U_0,$$

⁽²⁷⁾ Cette hypothèse est aussi nécessaire pour obtenir une solution « forte ».

où

$$\begin{aligned} U(t) &= [u(t), v(t)], & U_0 &= [u_0, v_0], & F(t) &= [0, f(t)]; \\ MU &= [-v, (Au + \partial\varphi(v)) \cap \mathcal{H}] + \sigma[u, v]. \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le théorème II.4 dans l'espace $X = \mathcal{V} \times \mathcal{H}$ muni du produit scalaire

$$\langle U_1, U_2 \rangle = a(u_1, u_2) + k(u_1, u_2) + (v_1, v_2),$$

où

$$U_1 = [u_1, v_1] \quad \text{et} \quad U_2 = [u_2, v_2].$$

L'opérateur M a pour domaine

$$D(M) = \{ U \in X; v \in D(\varphi) \text{ et } (Au + \partial\varphi(v)) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset \},$$

i. e. $U = [u, v] \in D(M)$ si et seulement si $u \in \mathcal{V}$, $v \in D(\varphi)$ et il existe $g \in \mathcal{H}$ tel que

$$a(u, w - v) + \varphi(w) - \varphi(v) \geq (g, w - v), \quad \forall w \in D(\varphi).$$

Il est immédiat que M est monotone; en effet,

$$\begin{aligned} \langle MU_1 - MU_2, U_1 - U_2 \rangle &\geq -k(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \\ &\quad + \sigma[a(u_1 - u_2) + k|u_1 - u_2|^2 + |v_1 - v_2|^2] \geq 0 \end{aligned}$$

(d'après la définition de σ). Vérifions que M est maximal monotone; étant donnés $G = [g, h] \in \mathcal{V} \times \mathcal{H}$ et $\lambda > 0$, on cherche $U = [u, v] \in D(M)$ tel que $U + \lambda MU \ni G$.

Autrement dit :

$$\begin{aligned} u + \lambda(-v + \sigma u) &= g, \\ v + \lambda(Au + \partial\varphi(v) + \sigma v) &\ni h, \end{aligned}$$

i. e.

$$(1.7) \quad (1 + \lambda\sigma)u - \lambda v = g,$$

$$(1.8) \quad (1 + \lambda\sigma)v + \lambda Av + \lambda \partial\varphi(v) \ni h.$$

Reportant $u = \frac{g + \lambda v}{1 + \lambda\sigma}$ dans (1.8), on a

$$(1.9) \quad (1 + \lambda\sigma)v + \frac{\lambda^2}{1 + \lambda\sigma}Av + \lambda \partial\varphi(v) \ni h - \frac{\lambda}{1 + \lambda\sigma}Ag.$$

Il est immédiat que (1.9) admet une solution.

REMARQUE III.2. — On a pour tout $t \in [0, T[$,

$$\frac{d^+}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) + \left(\left(A u + \partial \varphi \left(\frac{du}{dt} \right) \right) \cap \mathcal{H} - f \right)^0 = 0 \quad (28),$$

autrement dit :

$$\frac{d^+}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) = f - \text{Proj}_{\left(A u + \partial \varphi \left(\frac{du}{dt} \right) \right) \cap \mathcal{H}} f$$

(où Proj désigne la projection dans $\mathcal{H}$).

En effet, on sait (cf. théorème II.4) que

$$\frac{d^+}{dt} U + (MU - \sigma U - F)^0 = 0.$$

Or $MU - \sigma U - F = [-v, C]$ où C est le convexe fermé

$$\left(A u + \partial \varphi \left(\frac{du}{dt} \right) \right) \cap \mathcal{H} - f$$

et donc

$$(MU - \sigma U - F)^0 = [-v, C^0].$$

REMARQUE III.3. — La fonction $t \mapsto a \left(u, \frac{du}{dt} \right) + \varphi \left(\frac{du}{dt} \right)$ est lipschitzienne sur $[0, T]$ et on a p. p. sur $]0, T[$,

$$\frac{d}{dt} \left[a \left(u, \frac{du}{dt} \right) + \varphi \left(\frac{du}{dt} \right) \right] = a \left(\frac{du}{dt}, \frac{du}{dt} \right) + \left(f, \frac{d^2 u}{dt^2} \right) - \left| \frac{d^2 u}{dt^2} \right|^2.$$

En effet, appliquant (1.5) en $t = t_0$ avec $\varpi = \frac{du}{dt}(t_0 + h)$, on a

$$\begin{aligned} & \left(A u(t_0 + h), \frac{du}{dt}(t_0 + h) \right) - \left(A u(t_0), \frac{du}{dt}(t_0) \right) + \varphi \left(\frac{du}{dt}(t_0 + h) \right) - \varphi \left(\frac{du}{dt}(t_0) \right) \\ & \geq \left(f(t_0) - \frac{d^+}{dt} \left(\frac{du}{dt}(t_0) \right), \frac{du}{dt}(t_0 + h) - \frac{du}{dt}(t_0) \right) + \left(A u(t_0 + h) - A u(t_0), \frac{du}{dt}(t_0 + h) \right). \end{aligned}$$

Appliquant ensuite (1.5) en $t = t_0 + h$ avec $\varpi = \frac{du}{dt}(t_0)$, on a

$$\begin{aligned} & \left(A u(t_0 + h), \frac{du}{dt}(t_0 + h) \right) - \left(A u(t_0), \frac{du}{dt}(t_0) \right) + \varphi \left(\frac{du}{dt}(t_0 + h) \right) - \varphi \left(\frac{du}{dt}(t_0) \right) \\ & \leq \left(f(t_0 + h) - \frac{d^+}{dt} \left(\frac{du}{dt}(t_0 + h) \right), \frac{du}{dt}(t_0 + h) - \frac{du}{dt}(t_0) \right) \\ & \quad + \left(A u(t_0 + h) - A u(t_0), \frac{du}{dt}(t_0) \right). \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit aisément en comparant ces deux inégalités.

(28) C^0 désigne l'élément de norme minimale de C dans $\mathcal{H}$ si C est un convexe fermé de $\mathcal{H}$ (resp. dans X si C est un convexe fermé de X).

REMARQUE III.4. — Le résultat de régularité en t obtenu au théorème III.1 est optimal; en général $\frac{d^2 u}{dt^2} \notin C([0, T]; \mathcal{H})$ comme le montre l'exemple suivant.

On prend $\mathcal{V} = \mathcal{H} = \mathcal{V}' = \mathbf{R}$, $A u = u$, $f = 0$, $\varphi(r) = 0$ pour $r \geq 0$ et $\varphi(r) = +\infty$ pour $r < 0$, $u_0 = 0$, $v_0 = 1$.

On vérifie aisément que la solution de (1.5)-(1.6) est donnée par

$$u(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{si } t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

et n'est pas de classe C^2 .

III.2. — Régularité en x ; Exemples

Nous commençons par un résultat abstrait de régularité. Pour simplifier on fait l'hypothèse $a(u) \geq \alpha \|u\|^2$, $\forall u \in \mathcal{V}$, $\alpha > 0$. On suppose qu'il existe $h \in \mathcal{H}$ tel que pour tout $v \in D(\varphi)$, la solution v_ε de l'équation

$$v_\varepsilon + \varepsilon A v_\varepsilon = v + \varepsilon h$$

appartient à $D(\varphi)$ et vérifie

$$(2.1) \quad \varphi(v_\varepsilon) \leq \varphi(v).$$

THÉORÈME III.2. — On fait l'hypothèse (2.1) et les hypothèses du théorème III.1. Alors si $A u_0 \in \mathcal{H}$, la solution de (1.5)-(1.6) vérifie

$$(2.2) \quad A u(t) \in \mathcal{H}, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$(2.3) \quad A u \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$$

et plus précisément :

$$\|A u(t)\| \leq C \left(\|A u_0\| + \|v_0\| + \|h\| + |f(0)| + \int_0^t \left| \frac{df}{ds}(s) \right| ds \right).$$

Démonstration. — Soit $u_\varepsilon(t)$ la solution de l'équation

$$u_\varepsilon(t) + \varepsilon A u_\varepsilon(t) = u(t) + \varepsilon h t.$$

Comme

$$\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 u}{dt^2} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}),$$

on a

$$\frac{du_\varepsilon}{dt}, \quad \frac{d^2 u_\varepsilon}{dt^2} \in L^\infty(0, T; \mathfrak{V}), \quad \text{avec} \quad \frac{du_\varepsilon}{dt} + \varepsilon A \frac{du_\varepsilon}{dt} = \frac{du}{dt} + \varepsilon h.$$

On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a(u_\varepsilon(t) - u(t)) - \frac{1}{2} a(u_\varepsilon(0) - u_0) + \frac{1}{2} \left| \frac{du_\varepsilon}{dt}(t) - \frac{du}{dt}(t) \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) - \frac{du}{dt}(0) \right|^2 \\ &= \int_0^t \left(A u_\varepsilon - A u, \frac{du_\varepsilon}{dt} - \frac{du}{dt} \right) ds + \int_0^t \left(\frac{d^2 u_\varepsilon}{dt^2} - \frac{d^2 u}{dt^2}, \frac{du_\varepsilon}{dt} - \frac{du}{dt} \right) ds \\ &\leq \int_0^t \left(A u_\varepsilon + \frac{d^2 u_\varepsilon}{dt^2} - f, \frac{du_\varepsilon}{dt} - \frac{du}{dt} \right) ds. \end{aligned}$$

Posant $z_\varepsilon(t) = A u_\varepsilon(t) - f(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a(u_\varepsilon(t) - u(t)) + \frac{1}{2} \left| \frac{du_\varepsilon}{dt}(t) - \frac{du}{dt}(t) \right|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |z_\varepsilon(t)|^2 + \frac{\varepsilon}{2} a\left(\frac{du_\varepsilon}{dt}(t)\right) - \varepsilon \left(\frac{du_\varepsilon}{dt}(t), h\right) \\ &\leq \frac{1}{2} a(u_\varepsilon(0) - u_0) + \frac{1}{2} \left| \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) - v_0 \right|^2 + \frac{\varepsilon}{2} |z_\varepsilon(0)|^2 \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} a\left(\frac{du_\varepsilon}{dt}(0)\right) - \varepsilon \left(\frac{du_\varepsilon}{dt}(0), h\right) + \varepsilon \int_0^t |z_\varepsilon| \left| \frac{df}{dt} - h \right| ds. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} |z_\varepsilon(t)| &\leq |z_\varepsilon(0)| + \sqrt{a\left(\frac{du_\varepsilon}{dt}(0) - \xi\right)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{a(u_\varepsilon(0) - u_0)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left| \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) - v_0 \right| + \int_0^t \left| \frac{df}{dt} - h \right| ds, \end{aligned}$$

où $\xi = \frac{1}{\varepsilon} h$.

Or

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(0) + \varepsilon A u_\varepsilon(0) &= u_0, \\ \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) + \varepsilon A \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) &= v_0 + \varepsilon h, \\ z_\varepsilon(0) &= A u_\varepsilon(0) - f(0). \end{aligned}$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} a(u_\varepsilon(0) - u_0) &= \left(A u_\varepsilon(0) - A u_0, \frac{u_\varepsilon(0) - u_0}{\varepsilon} \right) \leq |A u_\varepsilon(0) - A u_0| \cdot |A u_\varepsilon(0)| \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) - v_0 \right|^2 &= \left(\frac{du_\varepsilon}{dt}(0) - v_0, h - A \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) \right) \leq \left\| \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) - v_0 \right\|_{\mathfrak{V}} \|h - A v_0\|_{\mathfrak{V}'} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Enfin

$$z_\varepsilon(0) \rightarrow A u_0 - f(0) \quad \text{dans } \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \frac{du_\varepsilon}{dt}(0) \rightarrow v_0 \quad \text{dans } \mathfrak{V}.$$

Exemple 1. — Soit β un graphe maximal monotone dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ tel que $0 \in D(\beta)$. Soient

$$(2.4) \quad f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(2.5) \quad u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad v_0 \in H_0^1(\Omega).$$

On suppose qu'il existe $g_0 \in L^2(\Omega)$ tel que

$$(2.6) \quad g_0 \in \beta(v_0) \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

THÉORÈME III.3. — *On fait les hypothèses (2.4)-(2.6).*

Alors il existe une fonction unique u vérifiant

$$u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega));$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial^+}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \Delta u + \beta(u) \ni f, \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p. p. sur } \Omega,$$

$$(2.8) \quad u(x, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p. p. sur } \Gamma,$$

$$(2.9) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

Démonstration. — On applique les théorèmes III.1 et III.2 avec $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{C} = L^2(\Omega)$,

$$a(u, v) = \sum_i \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad \text{et} \quad \varphi(u) = \int_{\Omega} j(u) dx,$$

où j est une fonction convexe s. c. i. de $\mathbf{R}$ dans $]-\infty, +\infty]$ telle que $\partial j = \beta$. On notera que pour tout $v \in L^2(\Omega)$, on a

$$\varphi((I + \varepsilon A)^{-1} v) \leq \varphi(v).$$

En effet, si $v_\varepsilon = (I + \varepsilon A)^{-1} v$, on a

$$v_\varepsilon - \varepsilon \Delta v_\varepsilon = v \quad \text{sur } \Omega \quad \text{et} \quad v_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Or

$$(2.10) \quad j_\lambda(v) - j_\lambda(v_\varepsilon) \geq \beta_\lambda(v_\varepsilon) \cdot v - v_\varepsilon = \beta_\lambda(v_\varepsilon) \cdot (-\varepsilon \Delta v_\varepsilon),$$

où β_λ (resp. j_λ) sont les régularisées de β (resp. j) définies au paragraphe I.2.1. Intégrant (2.10) sur Ω , on obtient

$$\int_{\Omega} j_\lambda(v) dx - \int_{\Omega} j_\lambda(v_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} \beta_\lambda(v_\varepsilon) \cdot (-\varepsilon \Delta v_\varepsilon) dx \geq 0 \quad (2^0),$$

(²⁰) On peut toujours se ramener au cas où $0 \in \beta(0)$ de sorte que $\beta_\lambda(0) = 0$.

donc

$$\int_{\Omega} j_{\lambda}(v_{\varepsilon}) dx \leq \int_{\Omega} j_{\lambda}(v) dx \leq \int_{\Omega} j(v) dx.$$

On achève la démonstration en utilisant le fait que $j_{\lambda}(v_{\varepsilon}) \uparrow j(v_{\varepsilon})$ quand $\lambda \downarrow 0$.

REMARQUE III.5. — On retrouve ainsi, avec quelques précisions supplémentaires, un résultat de Amerio-Prouse [1] (cf. aussi Lions-Strauss [1]).

Exemple 2. — Soient

$$(2.11) \quad \Psi \in H^2(\Omega) \quad \text{avec} \quad \Psi \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$(2.12) \quad f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(2.13) \quad u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad v_0 \in H_0^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad v_0 \geq \Psi \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

THÉORÈME III.4. — On fait les hypothèses (2.11)-(2.13).

Alors il existe une fonction unique u vérifiant

$$u \in C(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(0, T; H^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega));$$

$$(2.14) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \geq \Psi, \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p. p. sur } \Omega,$$

$$(2.15) \quad \frac{\partial^+}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \Delta u + f, \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p. p. sur } \left[\frac{\partial u}{\partial t} > \Psi \right],$$

$$(2.16) \quad \frac{\partial^+}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \text{Max} \{ \Delta u + f, 0 \}, \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p. p. sur } \left[\frac{\partial u}{\partial t} = \Psi \right],$$

$$(2.17) \quad u(x, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p. p. sur } \Gamma,$$

$$(2.18) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \text{p. p. sur } \Omega.$$

Démonstration. — On applique les théorèmes III.1 et III.2 avec $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$, $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$,

$$a(u, v) = \sum \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad \text{et} \quad \varphi(u) = \Psi_K(u),$$

où Ψ_K est la fonction indicatrice du convexe

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \Psi \text{ p. p. sur } \Omega\}.$$

On notera que l'hypothèse (2.1) est vérifiée avec $h = -\Delta \Psi$ (principe du maximum).

Enfin on a

$$\begin{aligned} & \left(\Delta u + \partial \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) \cap \mathcal{K} \\ &= \left\{ z \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} z + \Delta u \cdot v - \frac{\partial u}{\partial t} dx \leq 0, \forall v \in K \right\} \\ &= \left\{ z \in L^2(\Omega); z = -\Delta u \text{ p. p. sur } \left[\frac{\partial u}{\partial t} > \Psi \right] \text{ et } z \leq -\Delta u \text{ p. p. sur } \left[\frac{\partial u}{\partial t} = \Psi \right] \right\}. \end{aligned}$$

De sorte que

$$\text{Proj}_{\left(\Delta u + \partial \varphi \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right) \cap \mathcal{K}} f = \begin{cases} -\Delta u & \text{p. p. sur } \left[\frac{\partial u}{\partial t} > \Psi \right], \\ f - \text{Max} \{ \Delta u + f, 0 \} & \text{p. p. sur } \left[\frac{\partial u}{\partial t} = \Psi \right], \end{cases}$$

et on en déduit (2.15)-(2.16) à l'aide de la remarque III.2.

REMARQUE III.6. — On obtient un résultat analogue pour le convexe

$$K = \{ u \in H_0^1(\Omega); |\text{grad } u| \leq 1 \text{ p. p. sur } \Omega \}$$

(cf. aussi Brézis-Lions [1]).

Exemple 3. — Soit β un graphe maximal monotone dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Soient

$$(2.19) \quad f \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$(2.20) \quad u_0 \in H^2(\Omega), \quad v_0 \in H^1(\Omega) \quad \text{avec} \quad -\frac{\partial u_0}{\partial n} \in \beta(v_0) \text{ p. p. sur } \Gamma.$$

THÉORÈME III.5. — On fait les hypothèses (2.19)-(2.20).

Alors il existe une fonction unique u vérifiant

$$\begin{aligned} & u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \\ & \frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)); \\ (2.21) \quad & \frac{\partial^+ u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) - \Delta u = f, \quad \forall t \in [0, T], \text{ p. p. sur } \Omega, \end{aligned}$$

$$(2.22) \quad -\frac{\partial u}{\partial n} \in \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad \forall t \in [0, T], \text{ p. p. sur } \Gamma,$$

$$(2.23) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \text{ p. p. sur } \Omega.$$

De plus, on a pour tout $t \in [0, T]$, l'estimation

$$(2.24) \quad \|u(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|v_0\|_{H^1(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s) \right\|_{L^2(\Omega)} ds \right).$$

Démonstration. — On applique le théorème III.1 avec $\mathfrak{V} = H^1(\Omega)$, $\mathfrak{H} = L^2(\Omega)$,

$$a(u, v) = \sum \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \quad \text{et} \quad \varphi(u) = \int_{\Gamma} j(u) d\Gamma,$$

où j est une fonction convexe s. c. i. de $\mathbf{R}$ dans $]-\infty, +\infty]$ telle que $\partial j = \beta$. Grâce à (2.20), l'hypothèse (1.1) est satisfaite avec $b = -\Delta u_0$. Pour prouver la régularité en x et (2.24) on ne peut pas appliquer le théorème III.2. On utilise alors la méthode des translations tangentielles comme dans la démonstration du théorème II.14.

Soit u_ε la solution de l'équation

$$(2.25) \quad \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta u_\varepsilon = f \quad \text{sur } \Omega \times]0, T[,$$

$$(2.26) \quad -\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \beta_\varepsilon \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right) \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[,$$

$$(2.27) \quad u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad \text{sur } \Omega,$$

où β_ε est la régularisée Yosida de β (cf. § 1.2.1).

Pour tout $t \in [0, T]$, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in H^1(\Omega)$, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \Big|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$ et donc $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \in H^{1/2}(\Gamma)$; par suite, $u_\varepsilon(x, t) \in H^2(\Omega)$, $\forall t \in [0, T]$. On établit (2.24) en procédant par cartes locales; pour simplifier l'exposé on suppose que

$$\Omega = \{x = (x', x_N); x_N > 0\}$$

et on supprime l'indice ε .

Soit

$$\nabla u(x) = \frac{u(x + he_j) - u(x)}{h}, \quad \nabla^* u(x) = \frac{u(x - he_j) - u(x)}{h} \quad (1 \leq j \leq N-1).$$

On multiplie (2.25) par $\nabla^* \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)$ et on intègre par parties; il vient pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \nabla^* \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \nabla^* \nabla \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma + a \left(u, \nabla^* \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \int_{\Omega} f \cdot \nabla^* \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx.$$

Soit

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\nabla u, \nabla u) + \int_{\Gamma} \nabla \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \nabla \frac{\partial u}{\partial t} d\Gamma = \int_{\Omega} f \cdot \nabla^* \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) dx.$$

Or $\nabla \beta \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$ grâce à la monotonie de β . Donc

$$(2.28) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left| \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(\nabla u, \nabla u) \leq \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f \cdot \nabla^* \nabla u dx - \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} \nabla^* \nabla u dx.$$

On intègre (2.28) sur $]0, t[$ et après passage à la limite quand $h \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(t), \frac{\partial u}{\partial x_j}(t) \right) - \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial t}(x, t) \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_0}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx \\ & \leq - \int_{\Omega} f(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t) dx + \int_{\Omega} f(x, 0) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j^2} dx + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, s) dx ds. \end{aligned}$$

D'où, en particulier,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t) + f(x, t) \right|^2 dx & \leq \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}, \frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_0}{\partial x_j}(x) \right|^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |f(x, 0)|^2 dx + \int_{\Omega} f(x, 0) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_j^2}(x) dx \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + f \right) dx ds. \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x, t) + f(x, t) \right|^2 dx \right]^{1/2} \leq C \left(\|u_0\|_{H^2(\Omega)} + \|v_0\|_{H^1(\Omega)} + \|f(0)\|_{L^2} + \int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial t}(s) \right\|_{L^2} ds \right).$$

Enfin, le passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est immédiat.

III.3. — Existence, unicité et propriétés de la solution faible

On fait les hypothèses du paragraphe III.1 et on désigne par $\mathcal{X}$ la classe des fonctions ρ à variation bornée sur $[0, T]$ telles que $\rho \geq 0$ sur $[0, T]$ et $\int_0^T \rho(t) dt = 1$.

THÉORÈME III.6. — Soit $f \in L^2(0, T; \mathcal{X})$; soient $u_0 \in \mathcal{V}$ et $v_0 \in \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{X}}$.

Alors il existe une fonction u unique vérifiant

$$(3.1) \quad u \in C([0, T]; \mathcal{V}) \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{X}),$$

$$(3.2) \quad \int_0^T \frac{du}{dt}(t) \rho(t) dt \in D(\varphi), \quad \forall \rho \in \mathcal{X} \quad (3^0),$$

$$(3.3) \quad - \int_0^T \left(\frac{du}{dt}, w \right) \frac{d\rho}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \frac{d\rho}{dt} dt \\ + \int_0^T a(u, w) \rho dt + \frac{1}{2} \int_0^T a(u, u) \frac{d\rho}{dt} dt \\ + \varphi(w) - \varphi \left(\int_0^T \frac{du}{dt} \rho dt \right) \geq \int_0^T \left(f, w - \frac{du}{dt} \right) \rho dt, \\ \forall w \in D(\varphi), \quad \forall \rho \in \mathcal{X} \quad \text{tel que} \quad \rho(0+) = \rho(T-) = 0,$$

$$(3.4) \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0.$$

Nous utiliserons dans la démonstration du théorème III.6 les deux lemmes suivants :

LEMME III.1. — Soient $u_0 \in \mathcal{V}$ et $v_0 \in \overline{D(\varphi)}^{\mathcal{H}}$; alors il existe deux suites $u_{0_n} \in \mathcal{V}$ et $v_{0_n} \in D(\varphi)$ avec $u_{0_n} \rightarrow u_0$ dans $\mathcal{V}$ et $v_{0_n} \rightarrow v_0$ dans $\mathcal{H}$, telles que u_{0_n} et v_{0_n} vérifient l'hypothèse (1.1).

Démonstration du lemme III.1. — $D(\partial\varphi)$ est un sous-ensemble dense dans $\mathcal{V}$ de $D(\varphi)$. Donc pour tout $\delta > 0$ il existe $v_1 \in D(\partial\varphi)$ tel que $|v_1 - v_0| < \delta$; soit $z_1 \in \partial\varphi(v_1)$.

On considère alors $u_\varepsilon = (I + \varepsilon A)^{-1}(u_0 - \varepsilon z_1)$; on a

$$u_\varepsilon + \varepsilon A u_\varepsilon + \varepsilon \partial\varphi(v_1) \ni u_0,$$

de sorte que $(A u_\varepsilon + \partial\varphi(v_1)) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$. Montrons que $u_\varepsilon \rightarrow u_0$ dans $\mathcal{V}$. On a $u_\varepsilon - u_0 = -\varepsilon (I + \varepsilon A)^{-1}(A u_0 + z_1)$.

Posant $\xi_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$ et $\eta = -(A u_0 + z_1) \in \mathcal{V}'$, il vient

$$(3.5) \quad \xi_\varepsilon + \varepsilon A \xi_\varepsilon = \varepsilon \eta.$$

Multipliant (3.5) par ξ_ε , on obtient

$$|\xi_\varepsilon|^2 + \varepsilon \alpha \|\xi_\varepsilon\|^2 \leq \varepsilon (\eta, \xi_\varepsilon) + \varepsilon k |\xi_\varepsilon|^2 \leq \varepsilon \|\eta\|_{\mathcal{V}'} \|\xi_\varepsilon\| + \varepsilon k |\xi_\varepsilon|^2.$$

Donc $\|\xi_\varepsilon\|$ est borné et $|\xi_\varepsilon| \rightarrow 0$; par suite, $\xi_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $\mathcal{V}$ faible.

(3⁰) On notera que $\int_0^T \frac{du}{dt} \rho dt = u(T) \rho(T-) - u(0) \rho(0+) - \int_0^T u \frac{d\rho}{dt} dt$ appartient à $\mathcal{V}$.

D'autre part, on a $(A \xi_\varepsilon - \eta, \xi_\varepsilon) \leq 0$ et par conséquent :

$$\alpha \|\xi_\varepsilon\|^2 \leq k \|\xi_\varepsilon\|^2 + (\eta, \xi_\varepsilon) \rightarrow 0.$$

LEMME III.2. — Soit $\mathfrak{V}_i$ ($1 \leq i \leq k$) un espace de Hilbert muni d'une forme bilinéaire $a_i(u, v)$ continue et symétrique. On pose $a_i(u, u) = a_i(u)$.

Soient $f_i, g_i, h_i \in L^2(0, T; \mathfrak{V}_i)$ ($1 \leq i \leq k$).

Soit χ une fonction continue de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}$.

On suppose que

$$(3.6) \left\{ \begin{aligned} & - \int_0^T \chi(s) \rho'(s) ds \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_i \int_0^T a_i(f_i(s)) \rho'(s) ds - \sum_i a_i \left(\int_0^T f_i(s) \rho(s) ds, \int_0^T f_i(s) \rho'(s) ds \right) \\ & + \sum_i \int_0^T a_i(g_i(s), h_i(s)) \rho(s) ds - \sum_i a_i \left(\int_0^T g_i(s) \rho(s) ds, \int_0^T h_i(s) \rho(s) ds \right), \\ & \forall \rho \in \mathcal{X} \cap \mathcal{D}([0, T]; \mathbf{R}) \quad \text{avec} \quad \rho' = \frac{d\rho}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Alors χ est décroissant sur $[0, T]$.

Démonstration du lemme III.2. — Soit $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ une suite de fonctions à support dans $]-\varepsilon, 0[$ telles que $\rho_\varepsilon \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(s) ds = 1$.

Pour $t \in [0, T - \varepsilon]$ fixé, on prend dans (3.6), $\rho(s) = \rho_\varepsilon(t - s)$ [ce choix est licite puisque

$$\int_0^T \rho(s) ds = \int_{t-T}^t \rho_\varepsilon(\sigma) d\sigma = 1, \quad \text{car} \quad t - T \leq -\varepsilon \quad \text{et} \quad t \geq 0].$$

Comme $\rho'(s) = -\rho'_\varepsilon(t - s)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \chi(s) \rho'_\varepsilon(t - s) ds & \leq -\frac{1}{2} \sum_i \int_0^T a_i(f_i(s)) \rho'_\varepsilon(t - s) ds \\ & + \sum_i a_i \left(\int_0^T f_i(s) \rho_\varepsilon(t - s) ds, \int_0^T f_i(s) \rho'_\varepsilon(t - s) ds \right) \\ & + \sum_i \int_0^T a_i(g_i(s), h_i(s)) \rho_\varepsilon(t - s) ds \\ & - \sum_i a_i \left(\int_0^T g_i(s) \rho_\varepsilon(t - s) ds, \int_0^T h_i(s) \rho_\varepsilon(t - s) ds \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a sur $[0, T - \varepsilon]$:

$$(3.7) \quad \frac{d}{dt} \int_0^T \chi(s) \rho_\varepsilon(t-s) ds \leq -\frac{1}{2} \sum_i \frac{d}{dt} \int_0^T a_i(f_i(s)) \rho_\varepsilon(t-s) ds \\ + \frac{1}{2} \sum_i \frac{d}{dt} a_i \left(\int_0^T f_i(s) \rho_\varepsilon(t-s) ds \right) + A_\varepsilon(t) - B_\varepsilon(t),$$

où

$$A_\varepsilon(t) = \sum_i \int_0^T a_i(g_i(s), h_i(s)) \rho_\varepsilon(t-s) ds$$

et

$$B_\varepsilon(t) = \sum_i a_i \left(\int_0^T g_i(s) \rho_\varepsilon(t-s) ds, \int_0^T h_i(s) \rho_\varepsilon(t-s) ds \right).$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\int_0^T a_i(f_i(s)) \rho_\varepsilon(t-s) ds \rightarrow a_i(f_i(t)),$$

$$a_i \left(\int_0^T f_i(s) \rho_\varepsilon(t-s) ds \right) \rightarrow a_i(f_i(t)),$$

$$A_\varepsilon(t) \rightarrow \sum_i a_i(g_i(t), h_i(t)), \quad B_\varepsilon(t) \rightarrow \sum_i a_i(g_i(t), h_i(t)) \quad \text{dans } L^1(0, T).$$

Soit alors $\zeta \in \mathcal{D}(]0, T - \varepsilon[; \mathbf{R})$, $\zeta \geq 0$.

Multipliant (3.7) par ζ , intégrant sur $]0, T - \varepsilon[$ et passant à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, il vient

$$-\int_0^{T-\varepsilon} \chi(t) \frac{d\zeta}{dt}(t) dt \leq 0.$$

D'où l'on déduit que χ est décroissante sur $[0, T - \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration du théorème III.6.

Existence : Soit $f_n \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ une suite de fonctions telles que $\frac{df_n}{dt} \in L^1(0, T; \mathcal{H})$ et $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(0, T; \mathcal{H})$. Soient $u_{0_n} \in \mathcal{V}$ et $\varphi_{0_n} \in D(\varphi)$ deux suites vérifiant l'hypothèse (1.1) telles que $u_{0_n} \rightarrow u_0$ dans $\mathcal{V}$ et $\varphi_{0_n} \rightarrow \varphi_0$ dans $\mathcal{H}$ (cf. lemme III.1).

Soit alors u_n la solution (cf. théorème III.1) de l'inéquation

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{d^2 u_n}{dt^2}, w - \frac{du_n}{dt} \right) + a \left(u_n, w - \frac{du_n}{dt} \right) + \varphi(w) - \varphi \left(\frac{du_n}{dt} \right) \geq \left(f_n, w - \frac{du_n}{dt} \right), \\ \forall w \in D(\varphi), \quad \text{p. p. sur }]0, T[; \\ u_n(0) = u_{0_n}, \quad \frac{du_n}{dt} = \varphi_{0_n}. \end{array} \right.$$

Montrons que u_n est de Cauchy dans $C([0, T]; \mathfrak{V})$ et $\frac{du_n}{dt}$ est de Cauchy dans $C([0, T]; \mathfrak{H})$.

On a

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2 u_m}{dt^2}, w - \frac{du_m}{dt} \right) + a \left(u_m, w - \frac{du_m}{dt} \right) + \varphi(w) - \varphi \left(\frac{du_m}{dt} \right) &\geq \left(f_m, w - \frac{du_m}{dt} \right), \\ \forall w \in D(\varphi), \quad \text{p. p. sur }]0, T[. \end{aligned} \right.$$

Reportant $w = \frac{du_m}{dt}$ dans (3.8) et $w = \frac{du_n}{dt}$ dans (3.9), on obtient après addition :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \frac{du_n}{dt} - \frac{du_m}{dt} \right|^2 + a(u_n - u_m) \leq (f_n - f_m, u_n - u_m).$$

Il en résulte que u_n (resp. $\frac{du_n}{dt}$) est de Cauchy dans $C([0, T]; \mathfrak{V})$ [resp. $C([0, T]; \mathfrak{H})$]. Multipliant (3.8) par $\rho \in \mathfrak{D}$ avec $\rho(0+) = \rho(T-) = 0$, intégrant par parties et passant à la limite on obtient (3.3). On notera que grâce à la convexité de φ on a

$$\int_0^T \varphi \left(\frac{du_n}{dt} \right) \rho dt \geq \varphi \left(\int_0^T \frac{du_n}{dt} \rho dt \right)$$

et, par ailleurs :

$$\int_0^T \frac{du_n}{dt} \rho dt = u_n(T) \rho(T-) - u_n(0) \rho(0+) - \int_0^T u_n \frac{d\rho}{dt} dt$$

converge vers $\int_0^T \frac{du}{dt} \rho dt$ dans $\mathfrak{V}$.

Donc

$$\int_0^T \frac{du}{dt} \rho dt \in D(\varphi) \quad \text{et} \quad \varphi \left(\int_0^T \frac{du}{dt} \rho dt \right) \leq \liminf \int_0^T \varphi \left(\frac{du_n}{dt} \right) \rho dt.$$

Unicité : Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.3)-(3.4) et soit $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$.

On a donc

$$(3.10) \quad - \int_0^T \left(\frac{du_1}{dt}, w \right) \frac{d\rho}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \left| \frac{du_1}{dt} \right|^2 \frac{d\rho}{dt} dt + \int_0^T a(u_1, w) \rho dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T a(u_1) \frac{d\rho}{dt} dt + \varphi(w) - \varphi \left(\int_0^T \frac{du_1}{dt} \rho dt \right) \geq \int_0^T \left(f, w - \frac{du_1}{dt} \right) \rho dt,$$

$$(3.11) \quad -\int_0^T \left(\frac{du_2}{dt}, w \right) \frac{d\rho}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \left| \frac{du_2}{dt} \right|^2 \frac{d\rho}{dt} dt + \int_0^T a(u_2, w) \rho dt \\ + \frac{1}{2} \int_0^T a(u_2) \frac{d\rho}{dt} dt + \varphi(w) - \varphi \left(\int_0^T \frac{du_2}{dt} \rho dt \right) \geq \int_0^T \left(f, w - \frac{du_2}{dt} \right) \rho dt.$$

Après addition de (3.10) + (3.11) et division par 2 il vient

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\int_0^T \left(\frac{du}{dt}, w \right) \frac{d\rho}{dt} dt + \frac{1}{4} \int_0^T \left(\left| \frac{du_1}{dt} \right|^2 + \left| \frac{du_2}{dt} \right|^2 \right) \frac{d\rho}{dt} dt + \int_0^T a(u, w) \rho dt \\ + \frac{1}{4} \int_0^T (a(u_1) + a(u_2)) \frac{d\rho}{dt} dt + \varphi(w) - \varphi \left(\int_0^T \frac{du}{dt} \rho dt \right) \geq \int_0^T \left(f, w - \frac{du}{dt} \right) \rho dt, \\ \forall w \in D(\varphi), \quad \forall \rho \in \mathcal{D} \quad \text{avec} \quad \rho(0+) = \rho(T-) = 0. \end{array} \right.$$

On choisit dans (3.12) $w = \int_0^T \frac{du}{dt} \rho dt$ et on utilise les égalités

$$\frac{1}{4} \int_0^T \left(\left| \frac{du_1}{dt} \right|^2 + \left| \frac{du_2}{dt} \right|^2 \right) \frac{d\rho}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \frac{d\rho}{dt} dt + \frac{1}{8} \int_0^T \left| \frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right|^2 \frac{d\rho}{dt} dt, \\ \frac{1}{4} \int_0^T (a(u_1) + a(u_2)) \frac{d\rho}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_0^T a(u) \frac{d\rho}{dt} dt + \frac{1}{8} \int_0^T a(u_1 - u_2) \frac{d\rho}{dt} dt.$$

On obtient alors

$$-\frac{1}{8} \int_0^T \left[a(u_1 - u_2) + \left| \frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right|^2 \right] \frac{d\rho}{dt} dt \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \frac{d\rho}{dt} dt - \left(\int_0^T \frac{du}{dt} \rho dt, \int_0^T \frac{du}{dt} \frac{d\rho}{dt} dt \right) + \frac{1}{2} \int_0^T a(u) \frac{d\rho}{dt} dt \\ - a \left(\int_0^T u \rho dt, \int_0^T u \frac{d\rho}{dt} dt \right) + \int_0^T \left(f, \frac{du}{dt} \right) \rho dt - \left(\int_0^T f \rho dt, \int_0^T \frac{du}{dt} \rho dt \right).$$

On déduit du lemme III.2 appliqué avec

$$\chi = \frac{1}{8} a(u_1 - u_2) + \frac{1}{8} \left| \frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right|^2,$$

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{X}, \quad a_1(u, v) = (u, v), \quad f_1 = \frac{du}{dt}, \quad g_1 = f, \quad h_1 = \frac{du}{dt},$$

$$\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{V}, \quad a_2(u, v) = a(u, v), \quad f_2 = u, \quad g_2 = 0, \quad h_2 = 0,$$

que la fonction $t \mapsto a(u_1 - u_2) + \left| \frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right|^2$ est décroissante. Par conséquent $a(u_1 - u_2) + \left| \frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right|^2 \leq 0$; d'où il résulte que $u_1 = u_2$.

REMARQUE III.7. — Une méthode semblable permet d'établir l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème *parabolique* étudié au paragraphe II.2.6 (C). Soient $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $u_0 \in \mathcal{V}$. Alors il existe une fonction unique $u \in C([0, T]; \mathcal{V})$ vérifiant

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad \int_0^T \frac{du}{dt} \rho \, dt \in D(\varphi), \quad \forall \rho \in \mathcal{X}; \\ \int_0^T \left(\frac{du}{dt}, v - \frac{du}{dt} \right) \rho \, dt + \int_0^T a(u, v) \rho \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T a(u, u) \frac{d\rho}{dt} \, dt + \varphi(v) - \varphi \left(\int_0^T \frac{du}{dt} \rho \, dt \right) \\ \geq \int_0^T \left(f, v - \frac{du}{dt} \right) \rho \, dt, \quad \forall v \in D(\varphi), \quad \forall \rho \in \mathcal{X} \text{ tel que } \rho(0+) = \rho(T-) = 0; \\ u_0(0) = u_0. \end{aligned}$$

Dans le cas où φ est la fonction indicatrice d'un convexe $\mathcal{H}$ on peut envisager une formulation faible sensiblement différente du problème (1.5)-(1.6).

On fait les hypothèses du paragraphe III.1; soit $\mathcal{H}$ un convexe fermé de $\mathcal{V}$.

THÉORÈME III.7. — Soit $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et soient $u_0 \in \mathcal{V}$ et $v_0 \in \overline{\mathcal{H}^{\mathcal{H}}}$.

Alors il existe une fonction u unique vérifiant

$$(3.13) \quad u \in C([0, T]; \mathcal{V}), \quad \frac{du}{dt} \in C([0, T]; \mathcal{H}),$$

$$(3.14) \quad \int_0^T \frac{du}{dt}(t) \rho(t) \, dt \in \mathcal{H}, \quad \forall \rho \in \mathcal{X},$$

$$(3.15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^t \left(\frac{dw}{dt}, w - \frac{du}{dt} \right) ds + \int_0^t a(u, w) \, ds \\ & \geq \int_0^t \left(f, w - \frac{du}{dt} \right) ds + \frac{1}{2} \left| \frac{du}{dt}(t) - w(t) \right|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} a(u(t)) - \frac{1}{2} \|v_0 - w(0)\|^2 - \frac{1}{2} a(u_0), \\ & \forall t \in [0, T], \quad \forall w \in L^2(0, T; \mathcal{V}), \quad \frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad w(t) \in \mathcal{H} \text{ sur } [0, T], \end{aligned} \right.$$

$$(3.16) \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0.$$

Nous utiliserons dans la démonstration du théorème III.7 le lemme suivant :

LEMME III.3. — Soient $f \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et u vérifiant (3.13), (3.14) et (3.16). Alors

$$(3.17) \quad \inf \left\{ - \int_0^T \left(\frac{dw}{dt}, \frac{du}{dt} \right) dt + \int_0^T a(u, w) dt \right. \\ \left. + \left(w(T), \frac{du}{dt}(T) \right) - (w(0), v_0) - \int_0^T \left(f, w - \frac{du}{dt} \right) dt; \right. \\ \left. w \in L^2(0, T; \mathcal{V}) \text{ tel que } \frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H}), w(t) \in \mathcal{H} \text{ sur } [0, T] \right\} \\ \leq \frac{1}{2} a(u(T)) + \frac{1}{2} \left| \frac{du}{dt}(T) \right|^2 - \frac{1}{2} a(u_0) - \frac{1}{2} \|v_0\|^2.$$

Démonstration du lemme III.3. — Soit $\alpha \in \mathcal{O}(\mathbf{R})$ à support dans $]0, T]$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$; soit $\rho_\varepsilon \in \mathcal{O}(\mathbf{R})$ à support dans $] -\varepsilon, +\varepsilon[$ avec $\rho_\varepsilon \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(s) ds = 1$.

Soit $\xi \in \mathcal{H}$; on pose ⁽³⁴⁾

$$w_\varepsilon = \alpha \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \alpha \left(\frac{du}{dt} - \xi \right) + \xi = \alpha \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \alpha \frac{du}{dt} + (1 - \alpha \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \alpha) \xi.$$

On a $w_\varepsilon(t) \in \mathcal{H}$, $\forall t \in [0, T]$; en effet

$$\rho_\varepsilon \star \alpha \left(\frac{du}{dt} - \xi \right) (t) = \int_0^T \rho_\varepsilon(t-s) \alpha(s) \left(\frac{du}{dt}(s) - \xi \right) ds$$

appartient à $\mathcal{H} - \xi$ car

$$\int_0^T \rho(s) \left(\frac{du}{dt}(s) - \xi \right) ds \in \mathcal{H} - \xi, \quad \forall \rho \in \mathcal{X}$$

et par suite pour toute fonction $\rho \geq 0$ à variation bornée sur $[0, T]$ telle que $\int_0^T \rho(s) ds \leq 1$.

Comme

$$\rho_\varepsilon \star \alpha \left(\frac{du}{dt} - \xi \right) \in \mathcal{O}([-\infty, +\infty[; \mathcal{V})$$

⁽³⁴⁾ $\check{\rho}_\varepsilon(s) = \rho_\varepsilon(-s)$; $\alpha \frac{du}{dt} = 0$ en dehors de $]0, T[$.

on a

$$\alpha \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \alpha \left(\frac{du}{dt} - \check{\zeta} \right) \in \mathcal{K} - \check{\zeta}$$

et par ailleurs $\omega_\varepsilon \in C^\infty]-\infty, +\infty[; \mathfrak{V})$.

Avant de reporter $\omega = \omega_\varepsilon$ dans (3.17) on examine successivement les termes

$$\int_0^T \left(\frac{dw_\varepsilon}{dt}, \frac{du}{dt} \right) dt \quad \text{et} \quad \int_0^T a(u, w_\varepsilon) dt.$$

On a

$$\frac{dw_\varepsilon}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \alpha \frac{du}{dt} + \alpha \check{\rho}_\varepsilon \star \frac{d}{dt} \left(\rho_\varepsilon \star \alpha \frac{du}{dt} \right) - \left(\frac{d\alpha}{dt} \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \alpha + \alpha \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \frac{d\alpha}{dt} \right) \check{\zeta}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{dw_\varepsilon}{dt}, \frac{du}{dt} \right) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_\varepsilon \star \alpha \frac{du}{dt}, \rho_\varepsilon \star \frac{d\alpha}{dt} \frac{du}{dt} \right) dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} \left(\rho_\varepsilon \star \alpha \frac{du}{dt} \right), \rho_\varepsilon \star \alpha \frac{du}{dt} \right) dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\alpha}{dt} \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \alpha + \alpha \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \frac{d\alpha}{dt} \right) \left(\check{\zeta}, \frac{du}{dt} \right) dt. \end{aligned}$$

Le second terme de la somme étant nul, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \left(\frac{dw_\varepsilon}{dt}, \frac{du}{dt} \right) dt = \int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \alpha \frac{d\alpha}{dt} dt - 2 \int_0^T \left(\check{\zeta}, \frac{du}{dt} \right) \alpha \frac{d\alpha}{dt} dt.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_0^T a(u, w_\varepsilon) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} a \left(\rho_\varepsilon \star \alpha u, \rho_\varepsilon \star \alpha \frac{du}{dt} \right) dt + \int_0^T (1 - \alpha \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \alpha) a(u, \check{\zeta}) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} a \left(\rho_\varepsilon \star \alpha u, \frac{d}{dt} (\rho_\varepsilon \star \alpha u) \right) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} a \left(\rho_\varepsilon \star \alpha u, \rho_\varepsilon \star \frac{d\alpha}{dt} u \right) dt \\ &\quad + \int_0^T (1 - \alpha \check{\rho}_\varepsilon \star \rho_\varepsilon \star \alpha) a(u, \check{\zeta}) dt. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T a(u, w_\varepsilon) dt = - \int_0^T a(u, u) \alpha \frac{d\alpha}{dt} dt + \int_0^T (1 - \alpha^2) a(u, \check{\zeta}) dt.$$

Soit X la valeur de $\inf$ en (3.17); comme $\omega_\varepsilon(T) = \omega_\varepsilon(0) = \xi$, on a

$$X \leq - \int_0^T \left| \frac{du}{dt} \right|^2 \alpha \frac{d\alpha}{dt} dt + 2 \int_0^T \left(\xi, \frac{du}{dt} \right) \alpha \frac{d\alpha}{dt} dt - \int_0^T a(u, u) \alpha \frac{d\alpha}{dt} dt \\ + \int_0^T (1 - \alpha^2) a(u, \xi) dt - \int_0^T \left(f, \frac{du}{dt} - \xi \right) (\alpha^2 - 1) dt + \left(\xi, \frac{du}{dt}(T) \right) - \left(\xi, \frac{du}{dt}(0) \right).$$

Choisissant une suite α_n de fonctions à support dans $]0, T[$ telles que $\alpha_n = 1$ sur $\left[\frac{1}{n}, T - \frac{1}{n} \right]$, on voit aisément en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ que

$$X \leq \frac{1}{2} \left| \frac{du}{dt}(T) \right|^2 + \frac{1}{2} a(u(T)) - \frac{1}{2} \left| \frac{du}{dt}(0) \right|^2 - \frac{1}{2} a(u_0).$$

Démonstration du théorème III.7. — Pour prouver l'existence de u on procède comme dans la démonstration du théorème III.6. Montrons l'unicité de u ; soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.13)-(3.16), et soit $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$.

On a

$$(3.18) \quad \int_0^t \left(\frac{dw}{dt}, w - \frac{du_1}{dt} \right) ds + \int_0^t a(u_1, w) ds \\ \geq \int_0^t \left(f, w - \frac{du_1}{dt} \right) ds + \frac{1}{2} \left| \frac{du_1}{dt}(t) - w(t) \right|^2 \\ + \frac{1}{2} a(u_1(t)) - \frac{1}{2} |v_0 - w(0)|^2 - \frac{1}{2} a(u_0),$$

$$(3.19) \quad \int_0^t \left(\frac{dw}{dt}, w - \frac{du_2}{dt} \right) ds + \int_0^t a(u_2, w) ds \\ \geq \int_0^t \left(f, w - \frac{du_2}{dt} \right) ds + \frac{1}{2} \left| \frac{du_2}{dt}(t) - w(t) \right|^2 \\ + \frac{1}{2} a(u_2(t)) - \frac{1}{2} |v_0 - w(0)|^2 - \frac{1}{2} a(u_0).$$

Après addition de (3.18) + (3.19) et division par 2 il vient

$$\int_0^t \left(\frac{dw}{dt}, w - \frac{du}{dt} \right) ds + \int_0^t a(u, w) ds \\ \geq \int_0^t \left(f, w - \frac{du}{dt} \right) ds + \frac{1}{4} \left| \frac{du_1}{dt}(t) \right|^2 + \frac{1}{4} \left| \frac{du_2}{dt}(t) \right|^2 - \left(\frac{du}{dt}(t), w(t) \right) + \frac{1}{2} |w(t)|^2 \\ + \frac{1}{4} a(u_1(t)) + \frac{1}{4} a(u_2(t)) - \frac{1}{2} |v_0|^2 + (v_0, w(0)) - \frac{1}{2} |w(0)|^2 - \frac{1}{2} a(u_0).$$

Utilisant les égalités

$$\frac{1}{4} \left(\left| \frac{du_1}{dt}(t) \right|^2 + \left| \frac{du_2}{dt}(t) \right|^2 \right) = \frac{1}{2} \left| \frac{du}{dt}(t) \right|^2 + \frac{1}{8} \left| \frac{du_1}{dt}(t) - \frac{du_2}{dt}(t) \right|^2,$$

$$\frac{1}{4} (a(u_1(t)) + a(u_2(t))) = \frac{1}{2} a(u(t)) + \frac{1}{8} a(u_1(t) - u_2(t)),$$

on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^t \left(\frac{dw}{dt}, \frac{du}{dt} \right) ds + \int_0^t a(u, w) ds \\ & \geq \int_0^t \left(f, w - \frac{du}{dt} \right) ds + \frac{1}{2} \left| \frac{du}{dt}(t) \right|^2 + \frac{1}{8} \left| \frac{du_1}{dt}(t) - \frac{du_2}{dt}(t) \right|^2 - \left(\frac{du}{dt}(t), w(t) \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} a(u(t)) + \frac{1}{8} a(u_1(t) - u_2(t)) - \frac{1}{2} |v_0|^2 + (v_0, w(0)) - \frac{1}{2} a(u_0), \\ & \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall w \in L^2(0, T; \mathcal{V}), \quad \frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad w(t) \in \mathcal{K} \text{ sur } [0, T]. \end{aligned}$$

Grâce au lemme III.3 on a alors

$$\left| \frac{du_1}{dt}(t) - \frac{du_2}{dt}(t) \right|^2 + a(u_1(t) - u_2(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

d'où l'on déduit $u_1 = u_2$.

REMARQUE III.8. — Soit u la solution de (3.13)-(3.16) et soit $w \in L^2(0, T; \mathcal{V})$ avec $\frac{dw}{dt} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$ et $w(t) \in \mathcal{K}$ sur $[0, T]$. Alors la fonction $t \mapsto \left| \frac{du}{dt}(t) - w(t) \right|^2 + a(u(t))$ est à variation bornée et on a l'inéquation « ponctuelle » :

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left| \frac{du}{dt}(t) - w(t) \right|^2 + a(u(t)) \right) + \left(\frac{dw}{dt}, w - \frac{du}{dt} \right) + a(u, w) \geq \left(f, w - \frac{du}{dt} \right)$$

au sens des mesures sur $]0, T[$.

On établit aisément ce résultat en adaptant la démonstration du théorème II.3.

REMARQUE III.9. — Le théorème III.7 rejoint un résultat antérieur de Lions [1] sans toutefois le généraliser complètement. Il faudrait :

- 1° remplacer $a(u, v)$ par $a(t; u, v)$;
- 2° prouver l'unicité d'une solution « un peu plus faible » que celle que nous avons considérée.

Ces extensions peuvent être traitées en modifiant sensiblement notre démonstration.

APPENDICE I

Soient S un espace localement compact et μ une mesure positive sur S telle que $\mu(S) < +\infty$. Soient $\mathcal{V}$ un espace de Banach et φ une fonction convexe s. c. i. de $\mathcal{V}$ dans $]-\infty, +\infty]$, $\varphi \not\equiv +\infty$.

PROPOSITION 1. — *Pour tout $u \in L^1(S; \mathcal{V})$ la fonction $\varphi(u)$ est mesurable; $\varphi(u)$ est intégrable si et seulement si il existe $f \in L^1(S)$ tel que $\varphi(u) \leq f$, $\forall \mu$ p. p. sur S .*

Démonstration. — Il suffit (cf. Bourbaki [1], chap. IV, § 5, prop. 8) de montrer que pour tout λ l'ensemble $\{x \in S; \varphi(u(x)) > \lambda\}$ est mesurable; or l'ensemble $U = \{z \in \mathcal{V}; \varphi(z) > \lambda\}$ est ouvert et donc l'ensemble $\{x \in S; u(x) \in U\}$ est mesurable (cf. Bourbaki [1], chap. IV, § 5, prop. 7). D'autre part il existe (d'après Hahn-Banach) $a \in \mathcal{V}'$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(z) \geq (a, z) + b, \quad \forall z \in \mathcal{V}.$$

Il en résulte que $|\varphi(u)|$ est majoré par $\text{Max}\{|f|, \|a\| \cdot \|u\| + |b|\}$ qui est une fonction intégrable.

PROPOSITION 2. — *On pose, pour $u \in L^1(S; \mathcal{V})$:*

$$\Phi(u) = \begin{cases} \int_S \varphi(u) d\mu & \text{si } \varphi(u) \in L^1(S; \mathbb{R}), \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors Φ est convexe, s. c. i. sur $L^1(S; \mathcal{V})$ et $\Phi \not\equiv +\infty$.

Démonstration. — Il est immédiat que Φ est convexe et que $\Phi \not\equiv +\infty$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; montrons que $\left\{u \in L^1(S; \mathcal{V}); \int_S \varphi(u) d\mu \leq \lambda\right\}$ est fermé.

Soit $u_n \in L^1(S; \mathcal{V})$ tel que $u_n \rightarrow u$ dans $L^1(S; \mathcal{V})$ et $\int_S \varphi(u_n) d\mu \leq \lambda$.

On extrait une suite u_{n_k} telle que $u_{n_k} \rightarrow u$, μ p. p. sur S . Posant $g_{n_k} = \varphi(u_{n_k}) - (a, u_{n_k}) - b$ on a $g_{n_k} \geq 0$ et $\liminf g_{n_k} \geq \varphi(u) - (a, u) - b$, μ p. p. sur S . Par conséquent (lemme de Fatou), $\varphi(u) - (a, u) - b$ est intégrable et

$$\int_S [\varphi(u) - (a, u) - b] d\mu \leq \liminf \int_S g_{n_k} d\mu.$$

On en déduit que

$$\int_S \varphi(u) d\mu \leq \liminf \int_S \varphi(u_{n_k}) d\mu \leq \lambda.$$

PROPOSITION 3. — Soient $u \in L^p(S; \mathfrak{V}) \cap D(\Phi)$ et $f \in L^{p'}(S; \mathfrak{V}')$ avec

$$1 \leq p \leq +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad \Phi(v) - \Phi(u) \geq \int_S (f, v - u) d\mu, \quad \forall v \in L^p(S; \mathfrak{V}) \cap D(\Phi);$$

$$(2) \quad \text{Pour tout } v \in L^p(S; \mathfrak{V}) \cap D(\Phi), \text{ on a}$$

$$\varphi(v(x)) - \varphi(u(x)) \geq (f(x), v(x) - u(x)), \quad \mu \text{ p. p. sur } S.$$

Si $\mathfrak{V}$ est séparable ou bien $\mathfrak{V}$ réflexif et $1 < p < +\infty$.

$$(3) \quad \text{Il existe } A \subset S \text{ de mesure nulle tel que}$$

$$\varphi(v) - \varphi(u(x)) \geq (f(x), v - u(x)), \quad \forall x \in S - A, \quad \forall v \in D(\varphi).$$

Démonstration. — (1) $\Rightarrow$ (2) : Soit E un sous-ensemble μ mesurable de S . On prend dans (1) :

$$w = \begin{cases} v & \text{sur } E, \\ u & \text{sur } S - E. \end{cases}$$

Il est clair que $w \in L^p(S; \mathfrak{V})$ et on a donc

$$\int_E [\varphi(v) - \varphi(u) - (f, v - u)] d\mu \geq 0.$$

Ce résultat étant valable pour tout sous-ensemble mesurable E de S , on en déduit (2).

$$(2) \Rightarrow (1) \text{ et } (3) \Rightarrow (2) \text{ sont immédiats.}$$

(2) $\Rightarrow$ (3) : Cas où $\mathfrak{V}$ est séparable. — Il existe une suite $v_n \in D(\varphi)$ telle que pour tout $v \in D(\varphi)$ on peut trouver v_{n_k} vérifiant $v_{n_k} \rightarrow v$ et $\varphi(v_{n_k}) \rightarrow \varphi(v)$ (car le graphe de φ muni de la topologie induite par $\mathfrak{V} \times \mathbf{R}$ est séparable). Comme pour chaque n , on a

$$\varphi(v_n) - \varphi(u(x)) \geq (f(x), v_n - u(x)), \quad \mu \text{ p. p. sur } S,$$

on obtient un sous-ensemble $A \subset S$ de mesure nulle tel que

$$\varphi(v_n) - \varphi(u(x)) \geq (f(x), v_n - u(x)), \quad \forall n, \forall x \in S - A.$$

On en déduit (3) par passage à la limite.

Cas où $\mathfrak{V}$ est réflexif et $1 < p < +\infty$. On introduit dans

$$L^p(S; \mathfrak{V}) \times L^{p'}(S; \mathfrak{V}')$$

les deux graphes monotones M_2 et M_3 définis par

$$f \in M_2 u \iff f \text{ et } u \text{ vérifient (2),}$$

$$f \in M_3 u \iff f \text{ et } u \text{ vérifient (3).}$$

On a évidemment $M_3 \subset M_2$; montrons que M_3 est maximal monotone. On peut supposer que $\mathfrak{V}$ est strictement convexe ainsi que son dual $\mathfrak{V}'$. Soit $\mathcal{F}$ l'application de dualité de $\mathfrak{V}$ dans $\mathfrak{V}'$ vérifiant

$$(\mathcal{F} u, u) = \|u\|_{\mathfrak{V}}^p, \quad \mathcal{F} u \|_{\mathfrak{V}'} = \|u\|_{\mathfrak{V}}^{p-1}.$$

Soit $F u(x) = \mathcal{F}(u(x))$. On va établir que $F + M_3$ est surjectif sur $L^{p'}(S; \mathfrak{V}')$. Pour tout $f \in \mathfrak{V}'$ il existe $u \in D(\varphi)$ unique solution de l'inéquation

$$(\mathcal{F} u, v - u) + \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in D(\varphi).$$

L'application $f \mapsto u$ est continue de $\mathfrak{V}'$ fort dans $\mathfrak{V}$ faible.

Pour tout $f \in L^{p'}(S; \mathfrak{V}')$ il existe u tel que

$$(\mathcal{F} u(x), v - u(x)) + \varphi(v) - \varphi(u(x)) \geq (f(x), v - u), \quad \mu \text{ p. p. sur } S, \quad \forall v \in D(\varphi).$$

On en déduit que u est mesurable (utiliser l'appendice IV) et puis que $u \in L^p(S; \mathfrak{V}) \cap D(\Phi)$.

Par conséquent : $F u + M_3 u \ni f$.

APPENDICE II

On pose $F_q(r) = |r|^{q-2} r$, $r \in \mathbb{R}$, $q > 2$.

PROPOSITION. — Soit $1 < t < +\infty$ et soit $u \in W^{1,t}(\Omega)$, alors $F_q(u) \in W^{1,0}(\Omega)$ où

$$\frac{1}{0} = \begin{cases} \frac{q-1}{t} - \frac{q-2}{N} & \text{si } t < N, \\ \frac{1}{t} & \text{si } t > N. \end{cases}$$

Si $q \geq 3$, l'application $u \mapsto F_q(u)$ est lipschitzienne sur les bornés de $W^{1,t}(\Omega)$. Si $2 < q < 3$, l'application $u \mapsto F_q(u)$ est höldérienne d'exposant $q-2$ sur les bornés de $W^{1,t}(\Omega)$.

De plus, il existe une constante C telle que

$$\|F_q(u)\|_{W^{1,0}} \leq C \|u\|_{W^{1,t}}^{q-1}, \quad \forall u \in W^{1,t}(\Omega).$$

Démonstration. — Notons d'abord que l'on a

$$\begin{aligned} \|F_q(u) - F_q(v)\|_{L^0}^0 &= \int_{\Omega} | |u|^{q-2}u - |v|^{q-2}v |^0 dx \\ &\leq (q-1)^0 \int_{\Omega} |u - v|^0 \text{Max} \{ |u|^{(q-2)^0}, |v|^{(q-2)^0} \} dx. \end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants $(q-1)$ et $\frac{q-1}{q-2}$, il vient

$$\|F_q(u) - F_q(v)\|_{L^0}^0 \leq (q-1)^0 \left[\int_{\Omega} |u - v|^{0(q-1)} dx \right]^{\frac{1}{q-1}} \left[\int_{\Omega} (|u| + |v|)^{0(q-1)} dx \right]^{\frac{q-2}{q-1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|F_q(u) - F_q(v)\|_{L^0} &\leq (q-1) \|u - v\|_{L^{0(q-1)}} (\|u\|_{L^{0(q-1)}} + \|v\|_{L^{0(q-1)}})^{q-2} \\ &\leq C \|u - v\|_{W^{1,t}} (\|u\|_{W^{1,t}} + \|v\|_{W^{1,t}})^{q-2} \end{aligned}$$

puisque $W^{1,t}(\Omega) \subset L^{0(q-1)}(\Omega)$ avec injection continue [noter que $W^{1,t}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ si $t > N$ et $W^{1,t}(\Omega) \subset L^{t^*}(\Omega) \subset L^{0(q-1)}(\Omega)$ si $t < N$].

Estimons maintenant les termes de la forme

$$|u|^{q-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} - |v|^{q-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} = |u|^{q-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + (|u|^{q-2} - |v|^{q-2}) \frac{\partial v}{\partial x_i} = A + B.$$

MAJORATION DE A DANS L^0 . — On a

$$\left\| |u|^{q-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^0} \leq C \|u - v\|_{W^{1,t}} \|u\|_{W^{1,t}}^{q-2}.$$

Ce résultat est immédiat si $t > N$; supposons donc que $t < N$ et notons $w = \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

On a

$$\left\| |u|^{q-2} w \right\|_{L^0}^0 = \int_{\Omega} |u|^{(q-2)^0} |w|^0 dx \leq \left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{(q-2)^0 t}{t-0}} dx \right)^{\frac{t-0}{t}} \left(\int_{\Omega} |w|^t dx \right)^{\frac{0}{t}}$$

(appliquer l'inégalité de Hölder avec les exposants $\frac{t}{t-0}$ et $\frac{t}{0}$). Or $\frac{(q-2)^0 t}{t-0} = t^*$ et donc

$$\left\| |u|^{q-2} w \right\|_{L^0}^0 \leq \|u\|_{L^{t^*}}^{(q-2)^0} \|w\|_{L^t}^0.$$

MAJORATION DE B DANS L^0 . — Si $q \geq 3$, on a

$$\left\| (|u|^{q-2} - |v|^{q-2}) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^0} \leq C \|u - v\|_{W^{1,t}} (\|u\|_{W^{1,t}} + \|v\|_{W^{1,t}})^{q-3} \|v\|_{W^{1,t}}.$$

En effet, on a

$$||u|^{q-2} - |v|^{q-2}| \leq (q-2) |u - v| \max(|u|^{q-3}, |v|^{q-3}).$$

Par suite la majoration de B est immédiate si $t > N$; supposons $t < N$.
On a

$$\begin{aligned} \left\| (|u|^{q-2} - |v|^{q-2}) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^0}^0 &= \int_{\Omega} ||u|^{q-2} - |v|^{q-2}| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^0 dx \\ &\leq \left[\int_{\Omega} ||u|^{q-2} - |v|^{q-2}|^{\frac{0}{t-6}} dx \right]^{\frac{t-6}{t}} \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^t dx \right]^{\frac{0}{t}} \\ &\leq C \left[\int_{\Omega} |u - v|^{q-2} (|u| + |v|)^{\frac{t^*(q-3)}{q-2}} dx \right]^{\frac{t-6}{t}} \|v\|_{W^{1,t}}^0. \end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants $q-2$ et $\frac{q-2}{q-3}$, il vient

$$\left\| (|u|^{q-2} - |v|^{q-2}) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^0}^0 \leq C \|u - v\|_{L^{t^*}}^0 (\|u\|_{L^{t^*}} + \|v\|_{L^{t^*}})^{(q-3)0} \|v\|_{W^{1,t}}^0.$$

Si $2 < q < 3$, on a

$$\left\| (|u|^{q-2} - |v|^{q-2}) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^0} \leq C \|u - v\|_{W^{1,t}}^{q-2} \|v\|_{W^{1,t}}.$$

En effet,

$$||u|^{q-2} - |v|^{q-2}| \leq |u - v|^{q-2}.$$

Par suite, la majoration de B est immédiate si $t > N$; supposons donc $t < N$. On a

$$\left\| (|u|^{q-2} - |v|^{q-2}) \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^0}^0 \leq \int_{\Omega} |u - v|^{0(q-2)} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^0 dx \leq \|u - v\|_{L^{t^*}}^{0(q-2)} \|v\|_{W^{1,t}}^0.$$

APPENDICE III

PROPOSITION. — Soit J_n une suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que

$$\begin{aligned} |J_n r - J_n r'| &\leq |r - r'|, \quad \forall n, \forall r, r' \in \mathbf{R}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n r &= r, \quad \forall r \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Alors $J_n u$ converge vers u dans $L^p(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ et dans $W^{1,p}(\Omega)$ si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ où $1 < p < +\infty$.

Démonstration. — On sait que $J_n u \rightarrow u$ p. p. sur Ω .

D'autre part, $|J_n u|^p \leq (|J_n 0| + |u|)^p$; il résulte alors du théorème de Lebesgue que $J_n u \rightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$.

Par ailleurs, $\|J_n u\|_{W^{1,p}} \leq \|u\|_{W^{1,p}}$; on peut donc trouver une sous-suite $n_k \rightarrow +\infty$ telle que $J_{n_k} u$ converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$. Comme la limite est nécessairement u et que $\limsup \|J_n u\|_{W^{1,p}} \leq \|u\|_{W^{1,p}}$ on en déduit la convergence forte de $J_n u$ vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$.

APPENDICE IV

Soit S un espace métrique localement compact muni d'une mesure μ . Soient E et F deux espaces de Banach.

PROPOSITION. — Soit A une application continue de E fort dans F faible.

Soit u une fonction mesurable de S dans E ; alors Au est mesurable fortement de S dans F .

Démonstration. — Il suffit de montrer (cf. Bourbaki [1], chap. IV, § 5, corollaire 1) que :

- (1) l'application $x \in S \mapsto (Au(x), f')$ est mesurable pour tout $f' \in F'$;
- (2) pour tout ensemble compact $K \subset S$, il existe un sous-espace séparable H de F tel que $Au(x) \in H$ pour presque tout $x \in K$.

La propriété (1) est évidemment satisfaite puisque l'application $x \mapsto u(x)$ est mesurable et l'application $u \mapsto (Au, f')$ est continue. Vérifions (2); comme u est mesurable, il existe (cf. Bourbaki [1], chap. IV, § 5, définition 1) un ensemble $N \subset K$ de mesure nulle et une partition de $K \setminus N$ formée d'une suite K_n de compacts telle que la restriction de u à chaque K_n est continue. L'espace K_n étant métrique compact, il existe un sous-ensemble dénombrable $\{K_{nm}\}_m$ partout dense dans K_n . On prend alors pour H l'espace fermé engendré par $\{A(K_{nm})\}_{n,m}$ dans F . Si $x \in K \setminus N$ il existe n tel que $x \in K_n$ et donc il existe une suite $y_{m_i} \in K_{m_i}$ telle que $y_{m_i} \rightarrow x$.

Il en résulte que $u(y_{m_i}) \rightarrow u(x)$ dans E (fort) et $Au(y_{m_i}) \rightarrow Au(x)$ dans F faible. Mais $Au(y_{m_i}) \in H$, et donc $Au(x) \in H$ puisque H est faiblement fermé.

BIBLIOGRAPHIE

S. AGMON, A. DOUGLIS et L. NIRENBERG :

- [1] *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I (Comm. Pure Appl. Math., vol. 12, 1959, p. 623-727).

L. AMERIO et G. PROUSE :

- [1] *On the nonlinear wave equation with dissipative term with respect to the velocity* (Rend. Accad. Naz. Lincei, vol. 44, 1968, note I, fasc. 4, p. 491-492; note II, fasc. 5, p. 1-10).

E. ASPLUND :

- [1] *Averaged norms* (Israel J. Math., vol. 5, 1967, p. 227-233).

C. BARDOS :

- [1] *An abstract regularity theorem for parabolic equations* (J. Funct. Anal. vol. 7, 1971, p. 311-322).

N. BOURBAKI :

- [1] *Intégration*, chap. 1-4, 2^e édition, Hermann, Paris, 1965.

H. BRÉZIS :

- [1] *Équations et inéquations dans les espaces vectoriels en dualité* (Annales Inst. Fourier, t. 18, 1968, p. 115-175).
 [2] *Inéquations variationnelles associées à des opérateurs d'évolution. Theory and applications of monotone operators* (A. Ghizzetti ed.), NATO Summer School Venice, Oderisi, 1969.
 [3] *Perturbations non linéaires d'opérateurs maximaux monotones* (C. R. Acad. Sc., t. 269, série A, 1969, p. 566-569). Rédaction détaillée dans *Proc. Conf. on Evolution Equations*, University of Kansas, Lawrence, 1970.
 [4] *Propriétés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires* (Israel J. Math., vol. 9, 1971, p. 513-534).
 [5] *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes non linéaires* (Cours 3^e cycle, Paris, 1971).

H. BRÉZIS, M. CRANDALL et A. PAZY :

- [1] *Perturbations of non linear maximal monotone sets in Banach space* (Comm. Pure Appl. Math., vol. 23, 1970, p. 123-144).

H. BRÉZIS et J. L. LIONS :

- [1] *Sur certains problèmes unilatéraux hyperboliques* (C. R. Acad. Sc., t. 264, série A, p. 928-931).

H. BRÉZIS et A. PAZY :

- [1] *Semigroups of non linear contractions on convex sets* (J. Funct. Anal., vol. 6, 1970, 1967, p. 237-281).

H. BRÉZIS et M. SIBONY :

- [1] *Équivalence de deux inéquations variationnelles et applications* (Archive for Rat. Mech. and Anal. vol. 41, 1971, p. 254-265).

H. BRÉZIS et G. STAMPACCHIA :

- [1] *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques* (Bull. Soc. math. Fr., t. 96, 1968, p. 153-180).

F. BROWDER :

- [1] *Non linear monotone operators and convex sets in Banach spaces* (Bull. Amer. Math. Soc., vol. 71, 1965, p. 780-785).
 [2] *On a theorem of Beurling and Livingston* (Canadian J. Math., vol. 17, 1965, p. 367-372).
 [3] *On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone non linear operators in Banach spaces* (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., vol. 56, 1966, p. 1080-1086).
 [4] *Remarks on non linear interpolation in Banach spaces* (J. Funct. Anal.).
 [5] *Non linear operators and non linear equations of evolution in Banach spaces. Non-linear Functional Analysis* (Proc. Symp. Pure math., vol. 18, Part 2, A. M. S.).

M. CRANDALL et A. PAZY :

- [1] *Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets* (*J. Funct. Anal.*, vol. 3, 1969, p. 376-418).

G. DUVAUT et J. L. LIONS :

- [1] *Sur de nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posées par la Mécanique. Le cas stationnaire* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 510-513).
- [2] *Sur de nouveaux problèmes d'inéquations variationnelles posées par la Mécanique. Le cas d'évolution* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 570-572).
- [3] *Nouvelles inéquations variationnelles rencontrées en thermique et en thermoélasticité* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 1198-1201).
- [4] Livre à paraître.

G. FICHERA :

- [1] *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno* (*Mem. Accad. Naz. Lincei, Serie 8*, 7, 1964, p. 91-140).

A. FRIEDMAN :

- [1] *Generalized heat transfer between solids and gases under nonlinear boundary conditions* (*J. Math. Mech.*, vol. 8, 1959, p. 161-184).

P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA :

- [1] *On some nonlinear elliptic differential functional equations* (*Acta Math.*, vol. 115, 1966, p. 271-310).

Y. HAUGAZEAU :

- [1] *Sur des inéquations variationnelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 265, série A, 1967, p. 95-98).

T. KATO :

- [1] *Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces. Non-linear Functional Analysis* (*Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 18, Part 1, A. M. S., 1970).

Y. KOMURA :

- [1] *Nonlinear semi-groups in Hilbert spaces* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 19, 1967, p. 493-507).

H. LANCHON :

- [1] *Solution du problème de torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique de section quelconque* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 269, série A, 1969, p. 791-794).

H. LEWY et G. STAMPACCHIA :

- [1] *On the regularity of the solution of a variational inequality* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 22, 1969, p. 153-188).
- [2] *On existence and smoothness of solutions of some non coercive variational inequalities* (à paraître).

J. LINDENSTRAUSS :

- [1] *On nonseparable reflexive Banach spaces* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 72, 1966, p. 967-970).

J. L. LIONS :

- [1] *Sur un nouveau type de problème non linéaire pour opérateurs hyperboliques du deuxième ordre* (*Séminaire Leray, Collège de France*, 1965-1966, vol. II, p. 17-33).
- [2] *Remarks on evolution inequalities* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 18, 1966, p. 331-342).
- [3] *Some remarks on variational inequalities* (*Int. Conf. on Funct. Anal.*, Tokyo, 1969).
- [4] *Sur quelques nouveaux exemples de problèmes unilatéraux* (*J. of the Faculty of Science, University of Tokyo*).
- [5] *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris.
- [6] *Sur les inéquations variationnelles d'évolution pour les opérateurs du deuxième ordre en t* (*Symposium sur les problèmes d'évolution, Rome*, 1970).

J. L. LIONS et E. MAGÈNES :

- [1] *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.

J. L. LIONS et G. STAMPACCHIA :

- [1] *Variational inequalities* (Comm. Pure Appl. Math., vol. 20, 1967, p. 493-519).

J. L. LIONS et W. STRAUSS :

- [1] *Some nonlinear evolution equations* (Bull. Soc. math. Fr., t. 93, 1965, p. 43-96).

M. MIRANDA :

- [1] *Minimal surfaces with obstacles* (à paraître).

J. J. MOREAU :

- [1] *Fonctionnelles convexes* (Séminaires Leray, Collège de France, 1966-1967, vol. II).

U. MOSCO :

- [1] *A remark on a theorem of F. Browder* (J. Math. Anal. Appl., vol. 20, 1967, p. 90-93).

L. NIRENBERG :

- [1] *Remarks on strongly elliptic partial differential equations* (Comm. Pure Appl. Math., vol. 8, 1955, p. 648-674).

J. NITSCHKE :

- [1] *Variational problems with inequalities as boundary conditions* (Archive Rat. Mech. Anal., vol. 35, 1969, p. 83-113).

J. PEETRE :

- [1] *Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces* (Mathematica, Cluj).

E. SHAMIR :

- [1] *Regularity of mixed second order elliptic problems* (Israel J. Math., vol. 6, 1968, p. 150-168).

G. STAMPACCHIA :

- [1] *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes* (C. R. Acad. Sc., t. 258, 1964, p. 4413-4416).
 [2] *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus* (Annales Inst. Fourier, t. 15, 1965, p. 189-258).
 [3] *Regularity of solutions of some variational inequalities. Nonlinear Functional Analysis* (Proc. Symp. Pure Math., vol. 18, Part I, p. 271-281).
 [4] *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Presses de l'Université de Montréal.

T. W. TING :

- [1] *Elastic-plastic torsion problem* (Archive Rat. Mech. Anal., vol. 25, 1967, p. 342-386).

S. TROYANSKI :

- [1] *On local uniform convexity and differentiable norms in certain unseparable Banach spaces* (Studia Math., vol. 37).

DA VEIGA :

- [1] *Sulla hölderianità delle soluzioni di alcune disequazioni variazionali con condizioni unilaterali al bordo* (Annali Mat. Pura Appl., vol. 83, 1969, p. 73-112).
 [2] *Régularité pour une classe d'inéquations non linéaires* (C. R. Acad. Sc., t. 271, série A, 1970, p. 23-25).

(Manuscrit reçu le 13 janvier 1971.)

H. BRÉZIS,
 Institut Mathématique,
 Université Paris VI,
 9, Quai St Bernard, 75-Paris, 5^e.

DEUXIÈME THÈSE



PROPOSITIONS FAITES PAR L'UNIVERSITÉ



**Groupes de difféomorphismes
et mouvement d'un fluide incompressible**

Vu et approuvé :

Paris, le 9 juin 1971.

LE PRÉSIDENT DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS VI,

A. HERPIN



PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS
185023-72

Dépôt légal, Imprimeur, 1972, n° 1993

Imprimé en France

PARIS — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS

185023-72

Dépôt légal, Imprimeur, 1972, n° 1993

Imprimé en France